TRASFORMATORI

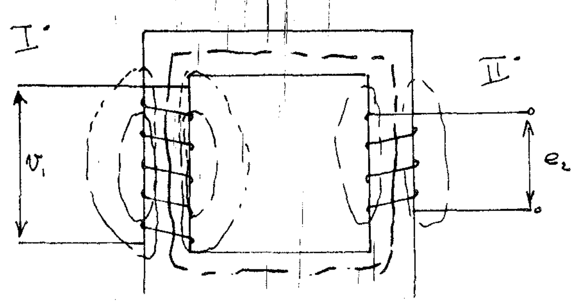
- Il trasformatore è una macchina elettrica statica composta da due circuiti elettrici, mutuamente accoppiati tra loro da un circuito ferro-magnetico.

- La presenza di un circuito ferro-magnetico (cioè a permeabilità del mezzo non costante) non ci permette di scrivere le equazioni proprie dei circuiti mutuamente accoppiati perchè nelle equazioni comparirebbero i coefficienti di auto e mutua induzione che per la variabilità della permeabilità del mezzo non sono definiti.

- La teoria del trasformatore si imposta sopra equazioni più rispondenti alla situazione che si determina per effetto della variabilità della riluttanza del nucleo ferromagnetico e quindi della variabilità anche dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Iniziamo la trattazione per i trasformatori monofasi; le equazioni che si trovano sono poi facilmente estensibili ai trasformatori trifasi e polifasi in genere.

- Un trasformatore monofase è costituito da due avvolgimenti, aventi rispettivamente n_1 e n_2 spire, disposti su un nucleo di lamierini ferromagnetici.



Per maggiore chiarezza, si sono rappresentati i due avvolgimenti sulle colonne opposte del nucleo

- Supponiamo di alimentare uno dei due avvolgimenti (I°) con una tensione v_1 in esso circolerà una corrente i_1
- Il prodotto $n_1 i_1$ costituisce la f.m.m. che vincendo la riluttanza del circuito ferro-magnetico fa circolare in esso un flusso φ_t (flusso totale primario)
- Per la nostra trattazione scindiamo φ_t in due flussi componenti

- Il flusso principale φ = che è definito come quel flusso che si concatena con entrambi gli avvolgimenti e si svolge nel nucleo

- Il flusso disperso primario φ_{d_1} = flusso che si concatena con le sole spire del primario e si svolge nell' aria

analogamente avremo per il circuito secondario (quando questo è percorso da una corrente)

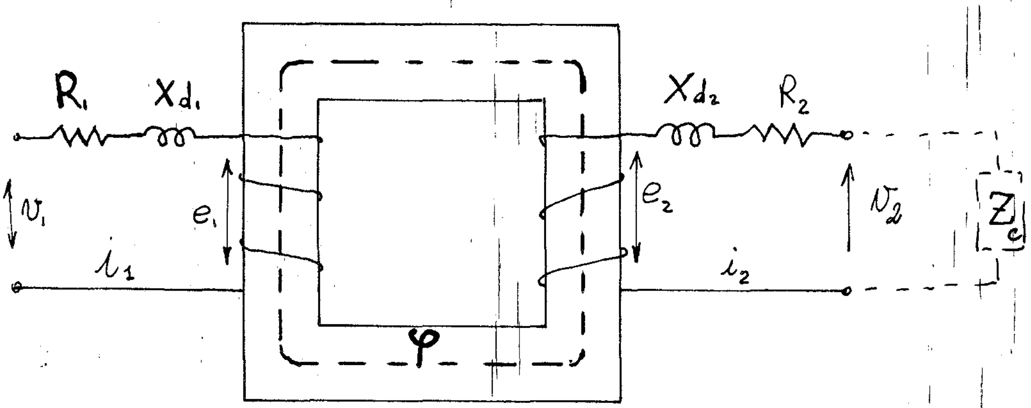
- Il flusso disperso secondario φ_{d_2} = flusso che si concatena con le sole spire del secondario e si svolge prevalentemente in aria

- I flussi dispersi svolgendosi prevalentemente in aria (mezzo a permeabilità magnetica costante) saranno legati linearmente alle correnti rispettive che li sostengono, potremmo così scrivere:

$$\varphi_{d_1} = l_{1d}\, i_1 \qquad \varphi_{d_2} = l_{2d}\, i_2$$

ove l_{1d} e l_{2d} sono i coefficienti di autoinduzione di dispersione del primario e del secondario rispettivamente.

3 - Indichiamo con R_1 e R_2 le resistenze proprie dei due avvolgimenti possiamo così schematizzare il nostro trasformatore:



ove X_{d_1} e X_{d_2} sono le reattanze di dispersione primaria e secon

$X_{d_1} = \omega \, l_{d_1}$ $\qquad X_{d_2} = \omega \, l_{d_2}$

- Abbiamo detto che il trasformatore è una macchina elettrica costituita da due circuiti elettrici accoppiati tra di loro da un circuito magnetico quindi per descrivere compiutamente questa macchina basterà scrivere le equazioni dei due circuiti elettrici e l'equazione del circuito magnetico.

Applicando la legge di Ohm ai due circuiti elettrici del trasformatore avremmo ai valori istantanei

$$(1)\begin{cases} v_1 + e_1 = R_1 i_1 + l_{d_1} \dfrac{di_1}{dt} \\ e_2 = v_2 + R_2 i_2 + l_{d_2} \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \qquad \text{ove } (2)\begin{cases} e_1 = -n_1 \dfrac{d\varphi}{dt} \\ e_2 = -n_2 \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

e_1 ; e_2 f.e.i. nell'avvolgimento I° e II° dalle variazioni del flusso principale φ

La legge di Hopkinson ci permette di scrivere una terza equazione relativa al circuito ferro-magnetico:

$$(3) \quad \varphi = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{R_m}$$

- Nella riluttanza figura però la permeabilità del circuito ferromagnetico la quale varia però da istante ad istante al variare del flusso.

- Possiamo però scrivere l'equazione del circuito magnetico in altro modo nelle ipotesi che il flusso φ da vuoto a carico rimanga costante

- Nel funzionamento a vuoto $i_2 = 0$ e $i_1 = i_{10}$ la legge di Hopkinson ci fornisce

(4) $$\varphi = \frac{n_1 i_{10}}{R_m}$$ dal confronto delle (3) e (4)

si ha:

(5) $$n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10}$$

Nel caso di grandezze sinusoidali le equaz. si scrivono in forma simbolica:

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j X_{d_1} \bar{I}_1 \\ \bar{E}_2 = \bar{V}_2 + R_2 \bar{I}_2 + j X_{d_2} \bar{I}_2 \\ n_1 \bar{I}_1 + n_2 \bar{I}_2 = n_1 \bar{I}_{10} \end{cases}$$

Dalle (2) si ha:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{n_1}{n_2} = n \quad (7)$$

definito dalle norme C.E.I fascicolo n° 253 "rapporto spire"

- Per grandezze sinusoidali ai valori efficaci dalle (2) si ha:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= n_1 \frac{\omega \Phi_M}{\sqrt{2}} = 4{,}44 \, f \, n_1 \Phi_M \\ E_2 &= n_2 \frac{\omega \Phi_M}{\sqrt{2}} = 4{,}44 \, f \, n_2 \Phi_M \end{aligned}\right\} (8)$$

Funzionamento a vuoto

- Il trasformatore funziona a vuoto quando il circuito secondario è aperto. Potenza utile $= 0$; la Potenza assorbita dal primario è tutta dissipata. Le equazioni sono:

$$i_2 = 0 \qquad (9) \quad \begin{cases} v_1 = -e_1 + R_1 i_{10} + l_{d1} \dfrac{d i_{10}}{dt} \\ v_{20} = e_2 \end{cases}$$

$I_{10} = (3\% \div 0,2\%)\, I_{1n} \Rightarrow$ le cadute a vuoto sono del tutto trascurabili essendo già piccole per valori di corrente $=$ a I_{1n}. Possiamo perciò scrivere:

$$(10) \quad \frac{v_1}{v_{20}} = -\frac{e_1}{e_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

è interessante far notare che v_1 e v_{20} sono grandezze misurabili

$v_1 / v_{20} =$ "rapporto di trasformazione" norme C.E.I. ove V_1 A.T.

Nel caso di grandezze sinusoidali si ha:

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + R_1 \bar{I}_{10} + j X_{d1} \bar{I}_{10} \\ \bar{V}_{20} = \bar{E}_2 \end{cases}$$

di immediata rappresentazione grafica.

— Bilancio energetico —

Moltiplicando la 1ª delle (9) per $i_{10} \Rightarrow$

$$v_1 i_{10} = -e_1 i_{10} + l_{d1} \frac{d i_{10}}{dt} i_{10} + R_1 i_{10}^2 \qquad (12)$$

ove:

- $R\, i_{10}^2 \rightarrow$ perdite nel rame
- $l_{d1} \dfrac{d i_{10}}{dt} i_{10} \rightarrow$ potenza reattiva di dispersione a valore medio nullo
- $e_1 i_{10} \rightarrow$ non può che rappresentare le perdite nel ferro

6

quindi i_{10} deve avere una componente i_a in fase con $-e_1$ per dar luogo alla potenza dissipata nel ferro detto $i_{10}=i_a+i_\mu$

$$v_1 i_{10} = -e_1 i_a - e_1 i_\mu + l_{d1} \frac{di_{10}}{dt} i_{10} + R_1 i_{10}^2 \qquad (13)$$

$$P_{fornita} = P_{Fe} + \underset{0}{\underset{\parallel}{P_{r\,magnet.}}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{P_{r\,disper.}}} + P_{cu_{10}} \qquad (14)$$

Ora essendo, già per valori nominali di corrente I_{1n}, trascurabili le perdite nel rame per $I_{10} = (3\% \div 0{,}2\%) I_{1n}$ dette perdite sono del tutto evanescenti; mentre le P_{Fe} dipendendo dai valori dell'induzione ed essendo questa determinato dal valore della v_1 che è la stessa sia a vuoto che a carico si conclude che a vuoto la potenza assorbita è totalmente dissipata nel ferro $\Rightarrow$ una misura della potenza assorbita a vuoto ci dà le perdite nel ferro del trasformatore.

Riassumendo: la prova a vuoto ci permette con due misure di determinare le perdite nel ferro e il rapporto di trasformazione:

Appendice:

La perdite specifiche per isteresi e correnti parassite sono espresse:

$$(15) \qquad P_{Fe} = \left(K_i f B_M^{1,6} + K_{cp} f^2 \delta^2 B_M^2\right) \quad \frac{Watt}{m^3}$$

per calcoli pratici le perdite totali in Watt sono date:

$$(16) \qquad P_{Fe} = c_p \cdot B_M^2 \cdot \left(\frac{f}{50}\right)^{1,2} \cdot G$$

ove c_p = cifra di perdita in W/Kg $\qquad G$ = peso Fe in Kg.

Funzionamento a carico

— Chiuso il circuito secondario su un carico Z_c circolerà una corrente i_2 nel secondario; le equazioni del nostro trasformatore sono le (1):

$$(1)\quad \begin{cases} v_1 + e_1 = R_1 i_1 + l_{d_1} \dfrac{di_1}{dt} \\ e_2 = v_2 + R_2 i_2 + l_{d_2} \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

— La corrente che circola nel secondario tende ad opporsi alla causa che la ha generata: la f.e.m. indotta secondaria, cioè le amper-spire secondarie tendono ad annullare il flusso principale che, con le sue variazioni induce le f.e.m. secondarie. Rispetto al funzionamento a vuoto le amper-spire totali agenti nel circuito magnetico del trasformatore tendono a diminuire con l'aumentare del carico e di conseguenza tendono a diminuire il flusso e la f.e.m primaria allora affinchè sia ancora valida la I° equazione delle (1) dovrà necessariamente aumentare la corrente i_1 compensando così con l'aumento delle cadute $(R_1 i_1 + l_{d_1} \frac{di_1}{dt})$ la diminuzione di e_1. Se, teoricamente il flusso restasse costante nessun aumento della corrente primaria sarebbe possibile in quanto la somma $v_1 + e_1$ resterebbe costante e lo stesso accadrebbe della i_1

— Una diminuzione di φ è quindi necessaria, ma, tenuto conto del piccolo valore della somma $v_1 + e_1 = v_1 - N_1 \frac{d\varphi}{dt}$ basta una piccolissima variazione di flusso per avere un notevole aumento della corrente i_1

Questo aumento è tale da compensare quasi completamente con le amperspire cui esso da luogo nel primario le amperspire secondarie, affinchè il flusso resti circa costante.

- Detto i_{12} = aumento della corrente primaria si ha:

$$(17) \qquad n_1 i_{12} = - n_2 i_2 \qquad \Rightarrow \qquad i_{12} = - \frac{n_2}{n_1} i_2$$

$$(18) \qquad i_1 = i_{10} + i_{12}$$

la (17) e la (18) insieme forniscono: $n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10}$

- Con una certa approssimazione possiamo scrivere:

$i_1 = i_{12}$ e $v_2 = v_{20}$ abbiamo così:

$$(19) \qquad \boxed{\frac{i_1}{i_2} = - \frac{n_2}{n_1}} \qquad e \qquad \boxed{\frac{v_1}{v_2} = - \frac{n_1}{n_2}} \qquad (20)$$

che sono le relazioni fondamentali del trasformatore

Per grandezze sinusoidali le equazioni fondamentali sono:

$$(21) \qquad \begin{cases} \bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j X_1 \bar{I}_1 \\ \bar{E}_2 = \bar{V}_2 + R_2 \bar{I}_2 + j X_2 \bar{I}_2 \\ n_1 \bar{I}_1 + n_2 \bar{I}_2 = n_1 \bar{I}_{10} \\ \bar{V}_2 = \bar{Z}_c \bar{I}_2 \end{cases}$$

di ovvia interpretazione grafica

- Bilancio energetico -

Moltiplicando la I^a delle (1) per i_1 si ha:

$$p_1 = v_1 i_1 = - e_1 i_1 + l_{d_1} \frac{d i_1}{dt} i_1 + R_1 i_1^2$$

ricordando che: $i_1 = i_{10} - \frac{n_2}{n_1} i_2$ e $i_{10} = i_\mu + i_q$

 possiamo scrivere

$$p_1 = -e_1 i_{10} + e_1 \frac{n_2}{n_1} i_2 + l_{d1} \frac{di_1}{dt} i_1 + R_1 i_1^2$$

ove $e_1 \frac{n_2}{n_1} = e_2$ quindi:

$$p_1 = -e_1 i_{\mu} - e_1 i_a + e_2 i_2 + l_{d1} \frac{di_1}{dt} i_1 + R_1 i_1^2$$

22

$$\boxed{p_1 = P_{Fe} + P_{cu_1} + P_{12}} \equiv \text{Potenza fornita} = \underset{0}{\underset{\parallel}{Pr\,mag.}} + P_{Fe} + P_{12} + \underset{0}{\underset{\parallel}{Pr\,disp.}} + P_{cu_1}$$

ove $p_{12} = e_2 i_2$ = potenza trasferita al secondario.

Moltiplicando per i_2 la II° equaz. delle 1 si ha:

$$p_2 = v_2 i_2 = e_2 i_2 - R_2 i_2^2 - l_{d2} \frac{di_2}{dt} i_2$$

23

$$p_2 = P_{12} - P_{cu_2} \qquad \boxed{P_{12} = P_2 + P_{cu_2}}$$

La 22 e la 23 insieme forniscono:

$$\boxed{P_1 = P_2 + P_{Fe} + P_{cu_1} + P_{cu_2} = P_2 + P_p}$$

La differenza $\Delta v = v_{02} - v_2$ si definisce 24
"Variazione di tensione" nel passaggio da vuoto a carico

Variazione di tensione $\mathbb{D}$° relativa $\Delta v_r = \frac{\Delta v}{v_{02}} = \frac{v_{02} - v_2}{v_{02}}$

che espressa in percento

25

$$\Delta v_2 \% = 100\, \Delta v_r = 100 \frac{V_{20} - V_2}{V_{02}}$$

Funzionamento in cortocircuito

– Chiudendo il secondario in corto-circuito $v_2 = 0$ la II° delle (1) diventa con $i_2 = i_{2c}$

(26) $$e_2 = R_2\, i_{2c} + l_{d2} \frac{di_{2c}}{dt}$$

ne segue che affinché la corrente i_{2c} sia contenuta in limiti accettabili dovrà essere diminuita la e_2 e con essa il flusso principale φ che la genera, in ultima analisi dipendendo il flusso dalla tensione di alimentazione v_1 se vogliamo contenere la i_{2c} dovremmo ridurre in c.c. la tensione di alimentazione.

In particolare chiameremo "Condizione di corto-circuito" quella condizione per cui la tensione di alimentazione primaria assume quel determinato valore in modo che nel secondario chiuso in c.c. circoli la corrente nominale i_2; in questa "Condizione di cortocircuito" la (26) diviene

(27) $$e_{2c} = R_2\, i_2 + l_{d2} \frac{di_2}{dt}$$

La e_{2c} è molto piccola rispetto alla e_2 quindi nella "Condizione di corto circuito" sarà molto piccolo il flusso φ con il flusso anche l'induzione avrà valori molto piccoli rispetto ai valori del funzionamento normale e dipendendo le perdite nel ferro dal $B^{1.6}$ o B^2 saranno evanescenti le P_{Fe} nella "Condizione di funzionamento in cortocircuito" ed evanescente sarà i_{10} e con essa i_μ e i_a possiamo così scrivere con ottima approssimazione

$$i_{10c} \to 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 i_{1c} + N_2 i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_{1c}}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\Rightarrow \quad i_{1c} = -\frac{N_2}{N_1}\, i_2 = i_{12}$$

Moltiplicando la (27) per $\frac{n_1}{n_2}$ si ha:

$$e_{2c}\frac{n_1}{n_2} = R_2\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{n_1}{n_2}i_2\frac{n_2}{n_1} + l_{d_2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{d\, i_2\cdot\frac{n_2}{n_1}}{dt}$$

$$e_{2c}\frac{n_1}{n_2} = R_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cdot i_2\frac{n_2}{n_1} + l_{d_2}\cdot\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cdot\frac{d\, i_2\frac{n_2}{n_1}}{dt}$$

posto (28) $R_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = R_{12}$ e $l_{d_2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = l_{d_{12}}$ (29)

$$e_{1c} = -R_{12}\, i_{12} - l_{d_{12}}\frac{d i_{12}}{dt} \quad (30) \quad \text{equaz II}^\circ$$

per il I° avremo: $v_{1c} = -e_{1c} + l_{d_1}\frac{d i_{1c}}{dt} + R_1 i_{1c}$ (31)

sostituendo nella (31) l'espressione di e_{1c} della (30)

$$v_{1c} = +R_{12}\, i_{12} + l_{d_{12}}\frac{d i_{12}}{dt} + R_1 i_{1c} + l_{d_1}\frac{d i_{1c}}{dt}$$

ricordando che $i_{1c} = i_{12}$

$$(32) \quad v_{1c} = (R_1 + R_{12})\, i_{12} + (l_{d_1} + l_{d_{12}})\frac{d i_{12}}{dt}$$

$$(33) \quad v_{1c} = R_{1t}\, i_{12} + l_{d_1t}\frac{d i_{12}}{dt}$$

questa equazione ultima ci dice che la tensione di alimentazione nella "condizione di cortocircuito" è data dalla caduta totale di tensione nel trasformatore riferito all'avvolgimento alimentato

Vediamo fin da ora quindi la necessità di semplificare lo studio dei trasformatori riferendoci non a due ma ad un solo circuito elettrico nel quale figurano oltre che i parametri propri (R e l_d) i parametri dell'altro avvolgimento riportati.

Bilancio energetico

Moltiplichiamo la (33) per i_{1c}

$$v_{1c} \cdot i_{1c} = R_{1t}\, i_{1c}^2 + \ell_{d1t} \frac{d i_{1c}}{dt}\, i_{1c}$$

la quale esprime che la potenza assorbita istantanea è la somma della potenza dissipata sul rame e della potenza reattiva di dispersione

Infatti i_{1c} si può considerare $= i_1$ e nelle condizioni di cortocircuito l'induzione è una piccola percentuale dell'induzione a pieno carico e perciò le perdite nel ferro si possono trascurare come trascurabile è pure la potenza reattiva relativa al circuito magnetico principale

La potenza fornita dal trasformatore nelle condizione di cortocircuito è totalmente dissipata nel rame degli avvolgimenti ed una piccolissima parte quasi evanescente è dissipata nei lamierini del ~~ferro~~ circuito ferro-magnetico.

Possiamo quindi concludere che una misura della potenza dissipata = potenza assorbita nelle condizione di corto circuito ci da la potenza dissipata nel rame.

Nelle condizione di corto circuito misurando V_{1c} e I_{1c} si h

$$\frac{V_{1c}}{I_{1c}} = Z_{cc} = \sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}$$

ed una misura della

potenza assorbita ci dà

$$\frac{P_{1c}}{I_{1c}^2} = R_{cc} \Rightarrow X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2}$$

ove $R_{cc} = R_1 + R_{12}$ $\quad X_{cc} = X_1 + X_{12}$