

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

$\vec{J}$ : densità della  
corrente di conduzione

$\rho$ : densità volumetrica  
di carica

Accanto alle equazioni precedenti occorre tenere presente il legame tra  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  imposto dal mezzo, cioè

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.5)$$

in cui  $\mu$  è la permeabilità magnetica del mezzo,  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto e  $\mu_r$  è la permeabilità magnetica relativa. Le quantità  $\mu$  e  $\mu_r$  sono molto spesso funzioni di  $\vec{H}$ , in quanto il mezzo d'interesse è non-lineare.

E' importante notare che nello scrivere la relazione (2.5) è stata fatta l'ipotesi di mezzo isotropo; solo in questo caso infatti il legame tra  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  può essere rappresentato semplicemente con una quantità scalare (permeabilità).

## 2.2 Il flusso d'induzione, la tensione magnetica e la forza magneto-motrice

L'ipotesi di velocità di propagazione infinita nella generica regione che costituisce la struttura magnetica in esame equivale ad imporre che sia nulla in essa la costante dielettrica. Di conseguenza in essa è nullo il vettore  $\vec{D}$ . Ciò comporta che nell'equ. (2.2) manca il termine  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  corrispondente alla corrente di spostamento; quindi le uniche sorgenti del campo magnetico  $\vec{H}$  sono dovute al vettore densità di corrente di conduzione  $\vec{J}$ .

### Osservazione 2.1

E' opportuno notare che l'ipotesi di velocità del campo elettromagnetico infinita nella struttura d'interesse permette di stabilire una catena di cause ed effetti fra le grandezze elettriche del seguente tipo:

- 1) Azione del circuito elettrico (avvolgimento di eccitazione) sul circuito magnetico: equ. (2.2)  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ ;
- 2) Intervento del mezzo magnetico: equ. (2.5)  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ;

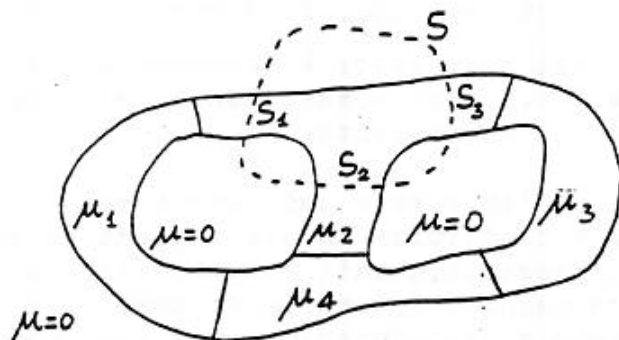


Fig.2.2  
Superficie chiusa considerata nella struttura magnetica.

l'integrale precedente si può suddividere nel modo seguente

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_3} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.7)$$

Definendo come flusso d'induzione attraverso la superficie  $S_i$  la quantità

$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (2.8)$$

la (2.7) diviene nell'ipotesi che le superfici  $S_i$  siano  $N$

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0 \quad (2.9)$$

Nel seguito, per brevità, useremo al posto della parola "flusso"

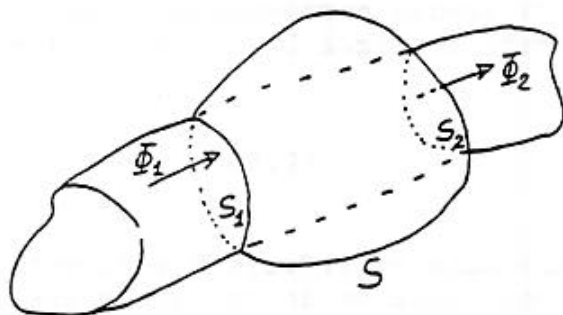


Fig.2.3  
Regione della struttura magnetica avente connessione semplice.

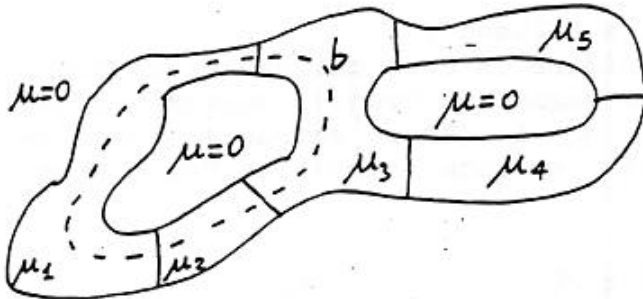


Fig.2.4  
Percorso chiuso  $b$   
interno alla strut-  
tura magnetica.

in cui  $t$  è la tangente alla linea  $b$  ed inoltre  $\vec{t}$  ed  $\vec{n}$  sono scelti con versi coordinati come indicato in fig.2.5. Dall'esame della (2.12) si riconosce che il campo magnetico  $\vec{H}$  risulta conservativo o meno a seconda che sia assente o presente la densità di corrente  $\vec{J}$  nella regione considerata. Tenendo conto dell'ipotesi fatta che sia nulla la conducibilità elettrica della struttura magnetica si ha in ogni caso  $\vec{J}=0$  nell'interno di essa. Quindi l'integrale a secondo membro della (2.12) è diverso da zero solo per la presenza di correnti di eventuali circuiti elettrici esterni alla struttura magnetica e concatenati con essa. In base a queste considerazioni si deduce che in una regione a connessione semplice della struttura magnetica risulta sempre

$$\oint_b \vec{H} \cdot \vec{t} \, db = 0 \quad (2.13)$$

in quanto esistono superfici con bordo  $b$  contenute totalmente nella regione stessa. Ciò implica che, fissate le superfici di ingresso ed uscita della regione ( $S_1$  ed  $S_2$  di fig.2.6) e su queste due punti  $P_1$  e  $P_2$ , è univocamente definita l'espressione

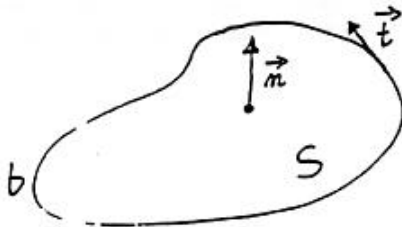


Fig.2.5  
Scelta dei versi coordinati dei versori  $\vec{t}$  ed  $\vec{n}$ .

considerata come se fosse impressa dall'esterno, cioè siamo in presenza di un generatore di tensione magnetica. A tale tensione impressa si dà il nome di "forza magneto-motrice". Vale perciò la seguente proprietà:

#### Proprietà 2.4

"La somma algebrica delle tensioni magnetiche delle regioni toccate da una linea chiusa interna ad una struttura magnetica è uguale alla forza magneto-motrice impressa da eventuali avvolgimenti concatenati con essa, coincidenti con la corrente che attraversa una superficie avente la linea considerata come bordo".

#### 2.3 Grafo di un circuito magnetico, leggi di Kirchhoff e relazioni costitutive

Limitiamo nel seguito l'attenzione al caso che ciascuna regione della struttura magnetica sia accessibile da due superfici. In questo caso fissati i punti di riferimento su tali superfici, è univocamente definita la tensione magnetica applicata alla generica regione. La regione è perciò caratterizzata dalle due grandezze: tensione magnetica e flusso, univocamente definite. In base alle proprietà 2.2 e 2.4, è possibile allora parlare di circuito magnetico e di grafo relativo, ottenuti sostituendo a ciascuna regione un bipolo ed inserendo opportunamente i generatori di forza magneto-motrice. Le proprietà 2.2 e 2.4 equivalgono alle leggi di Kirchhoff per tali particolari circuiti.

Per completare la caratterizzazione del circuito magnetico rimangono da individuare le relazioni costitutive dei componenti ideali che lo costituiscono. I componenti finora introdotti sono stati due: il bipolo che corrisponde ad una regione avente conducibilità elettrica nulla e permeabilità  $\mu$  ed il generatore di forza magneto-motrice. Essendo chiaro il significato del secondo, rimane da caratterizzare il primo. Supponiamo a questo scopo che la regione in questione sia accessibile attraverso due superfici e fissiamo due punti  $P_1$  e  $P_2$  su di esse; siano  $\Phi$  ed  $U_{P_1, P_2}$  il flusso e la tensione magnetica relative al bipolo risultante. Il legame fra il flusso  $\Phi$  e l'induzione magnetica  $\vec{B}$  nei punti interni alla regione considerata dipende dalla forma geometrica della regione stessa e dal modo in cui è distribuito il campo vettoriale di  $\vec{B}$ . Nel caso lineare tale legame può essere rappresentato semplicemente con

sere fatta in modo semplice solo in casi elementari, nei quali è nota la distribuzione del campo all'interno della regione considerata. La determinazione esatta è sempre molto complicata, essendo necessario individuare preventivamente la distribuzione del campo magnetico e dell'induzione in base alle condizioni al contorno, derivanti dalla forma delle superfici esterne alla regione stessa. E' opportuno osservare a tale proposito che i risultati dipendono anche dalle regioni contigue che influenzano la forma del campo vettoriale d'interesse. Inoltre il valore della tensione  $U_{P_1, P_2}$  dipende dalla scelta dei punti  $P_1$  e  $P_2$  che sono in generale arbitrari.

Un modo usuale per ottenere risultati di prima approssimazione è quello di supporre uniformi le distribuzioni dei campi  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$ . Un esempio in tal senso è il caso della regione di forma cilindrica mostrata in fig. 2.7. La riluttanza in questo caso viene determinata facendo le seguenti ipotesi:

- 1) Campo magnetico  $\vec{H}$  uniforme e diretto secondo l'asse del cilindro;
- 2) Induzione magnetica  $\vec{B}$  uniforme e diretta secondo l'asse del cilindro;
- 3) Punti  $P_1$  e  $P_2$  scelti al centro delle superfici di base.

Nell'ambito di queste ipotesi valide approssimativamente, detti con  $d$  ed  $S$  l'altezza e l'area di base del cilindro, si ottiene dalla (2.16)

$$|\vec{g}(P)| = \frac{1}{d} \quad (2.21)$$

e dalla (2.15)

$$|\vec{f}(P)| = \frac{1}{S} \quad (2.22)$$

Quindi la riluttanza vale in questo caso

$$R = \frac{d}{\mu S} \quad (2.23)$$

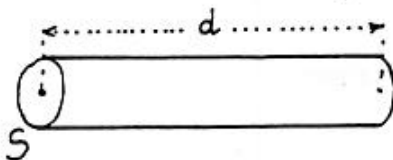


Fig. 2.7  
Regione di circuito magnetico considerata nell'oss. 2.2.

Esempio 2.1

Dato il circuito magnetico di fig.2.9, determinare l'andamento della riluttanza totale al variare della lunghezza del traferro. Le caratteristiche geometriche e magnetiche del circuito sono:

$$b_1 = 30 \text{ cm} \quad b_2 = 20 \text{ cm} \quad 0 < x < 1 \text{ mm} \quad S = 10 \text{ cm}^2$$

$$\mu = 4\pi 10^{-7} \cdot 5000 \text{ H/m}$$

Supponiamo che siano valide le ipotesi di prima approssimazione considerate nell'oss.2.2. La riluttanza della porzione di circuito magnetico costituita da materiale ferromagnetico vale, se trascuriamo la lunghezza del traferro rispetto a  $b_2$

$$Q_f = \frac{2(b_1 + b_2)}{\mu S} = \frac{2}{4\pi 10^{-7} 5000 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^7}{20\pi} = 1,59 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

La riluttanza del tratto in aria vale

$$Q_a = \frac{2x}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-3} x_m}{4\pi 10^{-7} 10^{-3}} = \frac{10^7}{2\pi} x_m = 1,59 \cdot 10^6 x_m$$

avendo indicato con  $x_m$  la lunghezza del traferro in millimetri. La riluttanza totale del circuito è quindi

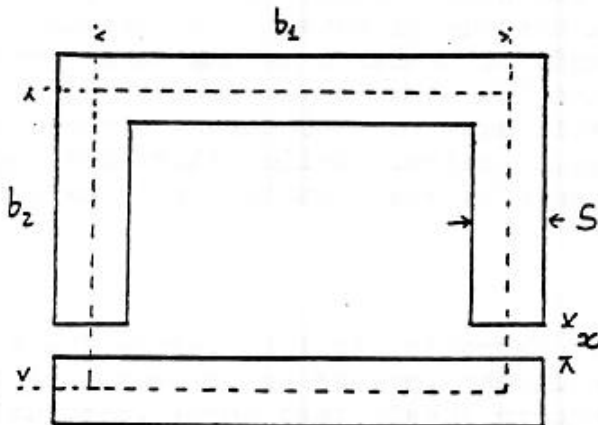


Fig.2.9  
Circuito magnetico considerato nell'esempio 2.1.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \iff \vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (2.25)$$

che mostrano come al posto di  $\vec{B}, \vec{H}, \mu$  possiamo mettere rispettivamente  $\vec{J}, \vec{E}, \gamma$ .

L'applicazione più utile dell'analogia consiste nell'utilizzare il simbolismo del circuito elettrico analogo per rappresentare un circuito magnetico. Di conseguenza, con questa tecnica rappresentiamo ciascuna regione di permeabilità  $\mu$  con un resistore di resistenza uguale alla relativa riluttanza. La tensione e la corrente applicati a tale resistore coincidono con la tensione magnetica e con il flusso relativi alla regione stessa. Il generatore di forza magnetomotrice viene ad essere rappresentato con un generatore di tensione con grandezza impressa uguale alla corrente concatenata. Per quanto riguarda la topologia del circuito elettrico si utilizza quella che scaturisce direttamente dall'esame della struttura magnetica.

### Esempio 2.2

Dato il magnete permanente mostrato in fig. 2.10, determinare il circuito equivalente elettrico ed il flusso all'interno del traferro. Si supponga che il legame fra  $|\vec{B}|$  ed  $|\vec{H}|$  per il magnete sia rappresentato dalla curva (linearizzata) di fig. 2.11.

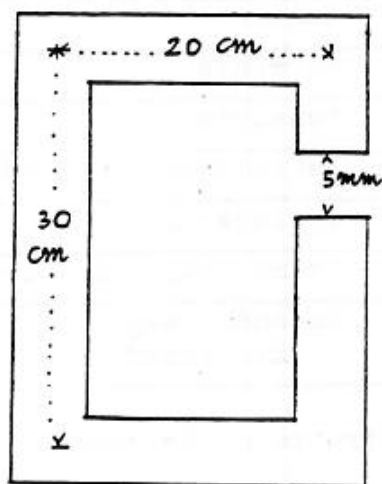


Fig. 2.10  
Magnete permanente considerato nell'esempio 2.2.  
La sezione trasversale è di  $1 \text{ cm}^2$ .



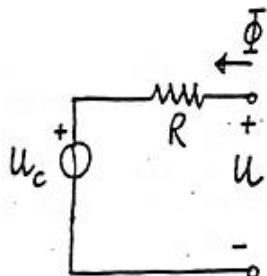


Fig. 2.13

Circuito equivalente elettrico corrispondente alla parte in materiale ferromagnetico del circuito magnetico di fig. 2.10. Risulta  $R = 5 \cdot 10^8$  ed  $U = -4 \cdot 10^4$  A/m.

(NOTA: La convenzione sui versi positivi di  $\Phi$  ed  $U$  è la stessa che viene usata per  $i$  e  $v$  nei bipoli elettrici)

$$U_c = -4 \cdot 10^4 \text{ A/m}$$

ed il resistore una resistenza uguale alla riluttanza

$$\frac{U_c}{\Phi_r} = \frac{4 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^8$$

La riluttanza del traferro vale

$$R_a = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}} = \frac{5 \cdot 10^8}{4\pi} \approx 4 \cdot 10^7$$

Inserendo il resistore che corrisponde a tale traferro nel circuito di fig. 2.13 si ottiene il circuito totale (fig. 2.14) equivalente alla struttura magnetica di fig. 2.10. Da tale circuito totale si ha che il valore del flusso è

$$\Phi = \frac{-U_c}{R + R_a} = \frac{4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

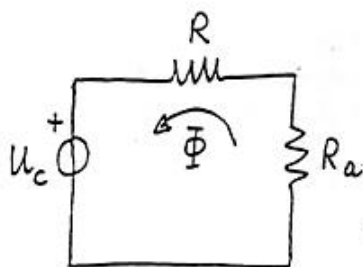


Fig. 2.14

Circuito elettrico equivalente a quello magnetico di fig. 2.10. La resistenza  $R_a$  è uguale alla riluttanza  $R_a$  del tratto in aria.



presentata dalla tensione impressa di un generatore di tensione. La seconda azione viene introdotta nel circuito che utilizziamo per l'avvolgimento mediante un generatore di tensione, la cui grandezza impressa è uguale alla derivata del flusso del circuito magnetico concatenato. Poiché d'altra parte ambedue le strutture in esame sono rappresentate da circuiti elettrici, i due generatori suddetti coincidono con generatori di tensione controllati ciascuno da una grandezza presente nell'altro circuito. Illustriamo quanto detto con un esempio.

### Esempio 3.1

Determinare il circuito che corrisponde alla struttura di fig. 3.1, in cui l'avvolgimento ha  $N$  spire.

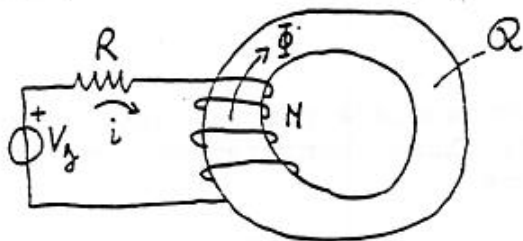


Fig. 3.1  
Struttura considerata nell'esempio 3.1;  $R$  è la resistenza dell'avvolgimento ed  $Q$  la riluttanza del circuito magnetico.

Il circuito da determinare comprende due parti, corrispondenti rispettivamente alla parte elettrica ed alla parte magnetica della struttura in esame. Il circuito risultante è mostrato in fig. 3.2. I generatori controllati che compaiono in esso rappresentano le interazioni reciproche delle due parti.

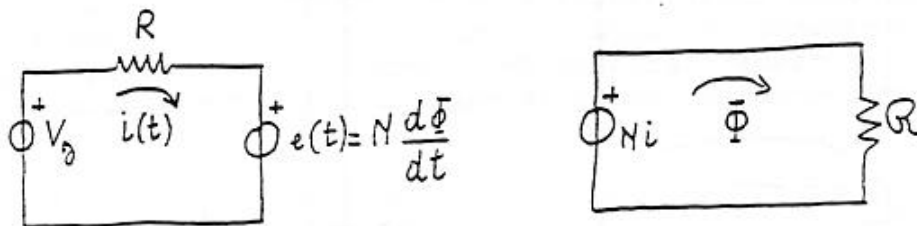


Fig. 3.2 Schema equivalente del dispositivo di fig. 3.1.

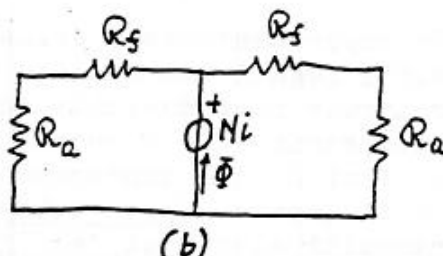
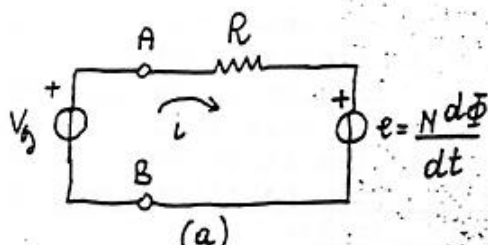
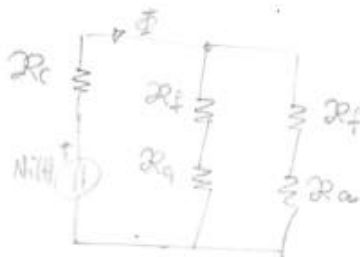


Fig. 3.4 Circuito equivalente globale del dispositivo di fig. 3.3; in (a) è riportato lo schema che riguarda la parte elettrica ed in (b) quello che riguarda la parte magnetica.

Il calcolo dell'induttanza si effettua considerando dapprima il circuito (b) e determinando l'espressione del flusso in funzione della corrente, cioè

$$\Phi = \frac{2 Ni}{R_f + R_a}$$

Quindi si sostituisce tale espressione nella relazione costitutiva del generatore controllato presente nel circuito (a), cioè

$$e = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2}{R_f + R_a} N^2 \frac{di}{dt}$$

Rapportando tale tensione alla derivata della corrente, si ha

$$L = \frac{2}{R_f + R_a} N^2$$

In condizioni di corrente costante, il flusso è dato da

$$\Phi = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 0,2}{R_f + R_a}$$

Tenendo conto della proprietà 2.5, trascuriamo la riluttanza  $R_f$  rispetto a quella del tratto in aria. Calcolando quest'ultima con

$$R_a = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 5,3 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

si ottiene

$$\Phi = \frac{2000 \cdot 0,2}{5,3 \cdot 10^5} = 7,55 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$