

I CIRCUITI MAGNETICI ED IL TRASFORMATORE

1. Introduzione

Molte strutture elettriche, tra cui principalmente le macchine elettriche, il trasformatore ecc., basano il loro funzionamento sull'interazione di avvolgimenti elettrici in presenza di materiali magnetici. Molto spesso questa interazione è complicata dalla presenza di parti in movimento e quindi da una trasformazione di energia meccanica in elettromagnetica e viceversa. La trattazione di tali strutture richiede l'introduzione, accanto ai circuiti a costanti concentrate usati per la rappresentazione degli avvolgimenti, di un'altra categoria di circuiti: i circuiti magnetici. I circuiti magnetici vengono usati per l'analisi del comportamento della parte magnetica delle strutture considerate. Il loro uso è valido sotto ipotesi semplificative dello stesso tipo di quelle viste nel caso dei circuiti a costanti concentrate. Vedremo perciò di seguito quali sono queste ipotesi e quali semplificazioni ne derivano alla trattazione dei dispositivi d'interesse.

L'applicazione dei circuiti magnetici verrà limitata nel presente fascicolo al caso del trasformatore.

2. Derivazione delle equazioni fondamentali dei circuiti magnetici dalle equazioni di Maxwell

La struttura fisica che consideriamo è un insieme, opportunamente coordinato, di materiali magnetici, avente lo scopo di stabilire un determinato andamento del campo magnetico sotto l'azione di avvolgimenti elettrici adeguatamente eccitati. La conoscenza della forma e della natura dei corpi facenti parte della struttura in questione e delle sollecitazioni impresses attraverso gli avvolgimenti rende possibile l'individuazione delle grandezze che definiscono il campo magnetico in ogni punto della regione. Tali grandezze sono:

- 1) il campo magnetico \vec{H} ,
- 2) l'induzione magnetica \vec{B} .

Le grandezze precedenti sono in generale funzioni del punto e del tempo e sono legate, tramite le equazioni di Maxwell, ai vettori \vec{E} (campo elettrico) e \vec{D} (induzione elettrica). Tali equazioni sono le seguenti:

3) Reazione sul circuito elettrico: equ. (2.1) $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$.

La distinzione delle tre fasi precedenti è essenziale nell'analisi di un circuito magnetico. Tuttavia, essa non ha più senso in presenza delle correnti di spostamento.

La struttura magnetica d'interesse può essere schematizzata come in fig. 2.1. Essa è costituita da più regioni di spazio occupate da materiali omogenei, aventi conducibilità elettrica nulla e permeabilità magnetica diversa da zero. Tali regioni sono tra loro contigue e costituiscono nel loro complesso una figura solida a connessione multipla. Un'ipotesi semplificativa assai utile è quella di supporre la struttura magnetica immersa in una regione a permeabilità nulla. In conseguenza di questa ipotesi l'induzione \vec{B} è diversa da zero solo nell'interno della struttura magnetica. D'altra parte ciò costituisce una buona approssimazione di quello che accade in realtà nelle applicazioni d'interesse, dove i materiali magnetici usati sono caratterizzati da una permeabilità relativa molto elevata.

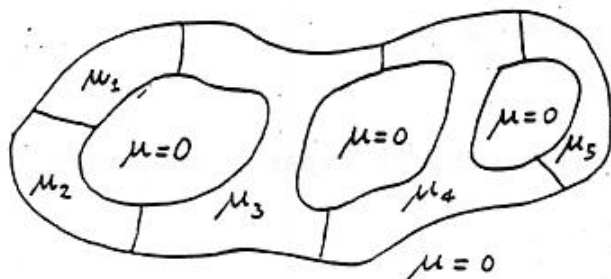


Fig. 2.1

Rappresentazione schematica della generica struttura magnetica.

Consideriamo una superficie chiusa S nella struttura magnetica di fig. 2.1; tale superficie taglia le varie regioni magnetiche a permeabilità diversa da zero in corrispondenza alle sue porzioni S_1, S_2, S_3 , come mostrato in fig. 2.2. In base all'equ. (2.3) si ha

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (2.6)$$

in cui \vec{n} è il versore normale alla superficie S e diretto verso l'interno della regione racchiusa da detta superficie. Poiché si è supposto $\mu=0$ in tutta la regione circostante, risulterà $\vec{B} \neq 0$ solo sulle superfici di taglio S_1, S_2, S_3 ; quindi l'in-

so d'induzione" la parola "flusso".

La (2.9) permette di definire in modo univoco il flusso $\vec{\Phi}$ che attraversa una struttura magnetica avente connessione semplice (fig.2.3). Infatti, detto $\vec{\Phi}_1$ il flusso entrante attraverso la superficie S_1 e $\vec{\Phi}_2$ quello uscente attraverso S_2 , in base alla (2.9) si ottiene

$$\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_1 \quad (2.10)$$

In conclusione vale la seguente proprietà:

Proprietà 2.1

Una regione magnetica a connessione semplice è caratterizzata da un flusso univocamente definito ed indipendente dalla forma e posizione delle superfici sulle quali è effettuato l'integrale della (2.8)".

Nel caso di una regione della struttura magnetica che sia a connessione multipla, la (2.9) implica la definizione in modo univoco del flusso attraversante ciascuna superficie terminale della regione stessa. Ciò comporta la possibilità di sostituire alla grandezza \vec{B} la grandezza globale $\vec{\Phi}$, cioè nell'ambito della struttura magnetica in esame possiamo limitare l'attenzione solo ai flussi e tralasciare di considerare la grandezza \vec{B} funzione di punto. La (2.3) viene allora sostituita dalla (2.9) e riassunta dalla seguente proprietà:

Proprietà 2.2

"La somma dei flussi entranti in una superficie chiusa, che tagli le varie regioni di una struttura magnetica, è uguale a zero".

Si consideri una linea chiusa b il cui percorso sia totalmente interno alla struttura magnetica considerata (fig. 2.4). Detta S una superficie avente b come bordo, si ha dalla (2.2), ricordando che $\vec{D}=0$

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS \quad (2.11)$$

che diviene per il teorema di Stokes

$$\oint_b \vec{H} \cdot \vec{t} \, db = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS \quad (2.12)$$

$$U_{P_1, P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{t} \quad (2.14)$$

dove l'integrale s'intende esteso ad una qualsiasi linea interna alla regione e congiungente i due punti P_1 e P_2 . All'espressione (2.14) si dà il nome di "tensione magnetica". Vale quindi la seguente proprietà:

Proprietà 2.3

"Una regione a connessione semplice è caratterizzabile da una tensione magnetica, definibile in modo univoco una volta che siano precisati i punti delle superfici di ingresso tra cui considerarla".

Quanto detto mette in evidenza la necessità di precisare per ciascuna regione di una struttura magnetica le superfici di ingresso e su queste un punto di riferimento.

Nel caso di una regione a connessione multipla, utilizzando ancora la (2.12), si possono definire nello stesso modo le tensioni magnetiche delle superfici di ingresso rispetto ad una di esse presa come riferimento.

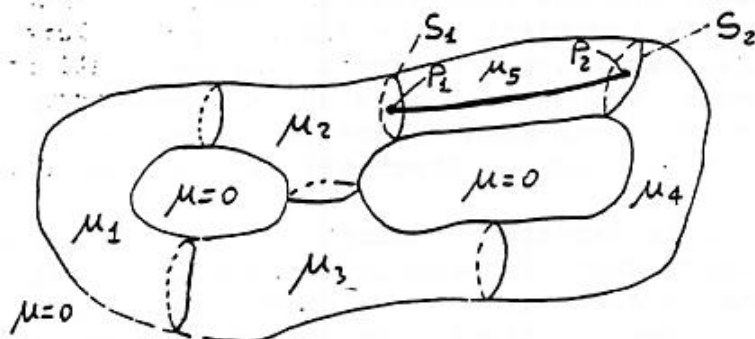


Fig. 2.6
Definizione di
tensione magne-
tica.

Consideriamo infine una linea chiusa interna alla struttura magnetica che passi per i punti di riferimento delle varie superfici terminali delle regioni. Applicando la (2.12) si ha che la somma delle tensioni magnetiche applicate alle varie regioni successivamente toccate è uguale alla somma delle eventuali correnti entranti in una superficie avente per bordo la linea considerata e dovute ad avvolgimenti concatenati con la struttura magnetica. È evidente che questo termine è l'effetto di un'azione esterna alla struttura magnetica e pertanto va

$$\vec{B} = \vec{f}(P) \Phi \quad (2.15)$$

dove $\vec{f}(P)$ è una funzione del punto P interno alla regione considerata, che tiene conto delle proprietà del campo vettoriale \vec{B} .

Un legame analogo sussiste nel caso lineare fra il campo vettoriale \vec{H} ed il valore della tensione magnetica U_{P_1, P_2}

$$\vec{H} = \vec{g}(P) U_{P_1, P_2} \quad (2.16)$$

dove $\vec{g}(P)$ è una nuova funzione dipendente dal punto P , che tiene conto delle proprietà del campo vettoriale \vec{H} .

Poiché in ogni punto della regione si ha dalla (2.5)

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.17)$$

ne risulta il legame seguente fra la tensione magnetica ed il flusso

$$U_{P_1, P_2} = \frac{|\vec{f}(P)|}{\mu |\vec{g}(P)|} \Phi \quad (2.18)$$

La (2.18) viene usualmente messa in un'altra forma, introducendo la "riluttanza magnetica \mathcal{R} "

$$\mathcal{R} = \frac{|\vec{f}(P)|}{\mu |\vec{g}(P)|} \quad (2.19)$$

Precisamente, si usa

$$U_{P_1, P_2} = \mathcal{R} \Phi \quad (2.20)$$

che costituisce la legge di Hopkinson.

Osservazione 2.2

La determinazione del valore della riluttanza \mathcal{R} può es-

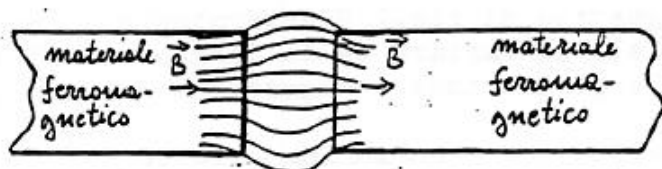


Fig. 2.8
Traferro con in evidenza le linee di forza dell'induzione.

Osservazione 2.3

Nei casi di maggiore interesse pratico la permeabilità μ della regione considerata è molto maggiore di quella del mezzo circostante, pari a μ_0 . In questi casi è giustificata l'ipotesi fatta precedentemente di supporre l'induzione \vec{B} nulla all'esterno del circuito magnetico. Unica eccezione a tale situazione è quella di alcuni tratti di circuiti magnetici di grande importanza pratica, detti traferri. Essi sono costituiti da un tratto di circuito magnetico in aria o in materiale non ferromagnetico, interposto fra due tratti contigui in materiale ferromagnetico (fig. 2.8). La forma e la distribuzione delle linee di forza di \vec{B} sono strettamente dipendenti dalla forma delle due superfici contigue tra cui è il traferro. Tuttavia, anche in questo caso è possibile definire la riluttanza, che per un traferro cilindrico coincide con la (2.23), dove si ponga, al posto di μ , μ_0 . È evidente che in tal caso il valore ottenuto è approssimato per eccesso, in quanto l'induzione \vec{B} interessa una superficie S maggiore di quella delle superfici contigue; ciò può essere previsto aumentando opportunamente detta superficie ed introducendo la nozione di superficie "efficace". In tutti gli altri casi, quando il traferro ha una forma irregolare o dimensioni irregolari (ad esempio per effetto di un non perfetto parallelismo delle superfici contigue) ovvero quando il tratto in aria è lungo, il calcolo della riluttanza deve essere effettuato determinando la distribuzione del campo \vec{H} e dell'induzione \vec{B} .

Osservazione 2.4

→ In presenza di mezzi ferromagnetici il legame fra \vec{B} ed \vec{H} , dato dalla (2.5) è non lineare, poiché la permeabilità μ dipende da \vec{B} . Di conseguenza in questo caso anche la riluttanza dipende da \vec{B} e quindi dal flusso Φ , per cui il legame stabilito dalla (2.20) fra il flusso e la tensione magnetica è non lineare.

$$R_t = R_f + R_a = 1,59 \cdot 10^5 (1 + 10 \alpha_m)$$

da cui si deduce che l'effetto della riluttanza del traferro è già preponderante per lunghezze dell'ordine del decimo di millimetro. Tale risultato viene riassunto nella seguente proprietà per la sua rilevanza nel caso delle macchine elettriche.

Proprietà 2.5

"Quando in un circuito magnetico è presente un traferro, la riluttanza di questo è predominante rispetto alle riluttanze delle porzioni costituite da materiale ferromagnetico".

2.4 Analogia fra circuito magnetico ed elettrico: rappresentazione di un circuito magnetico

In base a quanto detto nel paragrafo precedente è facile vedere che il circuito magnetico è del tutto simile ad uno elettrico a costanti concentrate secondo la corrispondenza di tab.2.1.

Tab.2.1 Analogia tra circuito magnetico ed elettrico

Circuito magnetico	Circuito elettrico
maglia	maglia
taglio	taglio
flusso Φ	corrente i
tensione magnetica U	tensione v
forza magnetomotrice Ni	generatore di tensione
riluttanza \mathcal{R}	resistenza R
Proprietà 2.2	Prima legge di Kirchhoff
Proprietà 2.4	Seconda legge di Kirchhoff

Tale analogia ha una motivazione diretta nelle equazioni di Maxwell seguenti:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (2.24)$$

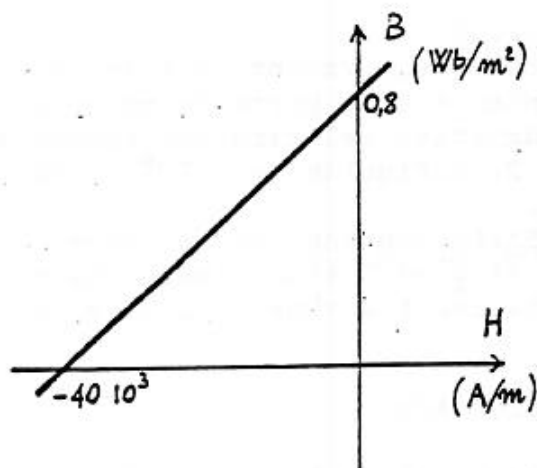


Fig. 2.11
Andamento dell'induzione in funzione del campo magnetico per il materiale che costituisce il magnete permanente considerato in fig. 2.10.

Dalla curva di magnetizzazione di fig. 2.11 si vede che si ha una induzione di $0,8 \text{ Wb/m}^2$ in presenza di un campo magnetico nullo. Tale valore rappresenta l'induzione residua del materiale. Inoltre un campo magnetico di -40 kA/m permette di annullare totalmente l'induzione del materiale. Tale valore del campo magnetico prende il nome di campo coercitivo. Il legame fra il flusso Φ e la tensione magnetica U nel materiale ferromagnetico si ottiene ricordando che

$$\Phi = B S \quad U = H b$$

dove S è la sezione del magnete uguale a 10^{-4} m^2 e b è la sua lunghezza uguale a circa 1 m . Si ottiene quindi il diagramma di fig. 2.12. A tale diagramma corrisponde lo schema equivalente di fig. 2.13, costituito da un generatore di tensione ed un resistore. Il generatore di tensione ha una tensione impressa uguale a

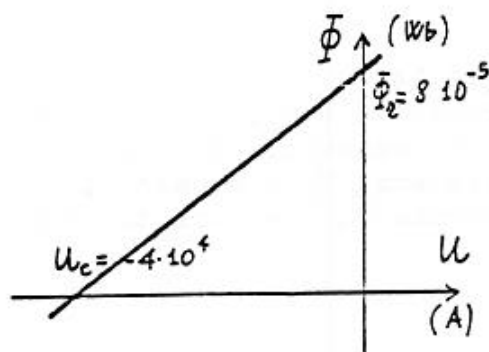


Fig. 2.12
Legame fra il flu. o Φ e la tensione magnetica U per il circuito di fig. 2.10.

3. Interazione fra una struttura magnetica ed un avvolgimento concatenato: induttore

La presenza di un avvolgimento elettrico concatenato con la struttura magnetica del tipo di quella considerata in precedenza dà luogo a due fenomeni distinti:

- 1) un'azione dell'avvolgimento sulla struttura magnetica, che si esplica nel circuito magnetico con cui schematizziamo tale struttura mediante la presenza di un generatore di forza magnetomotrice;
- 2) un'azione della struttura magnetica che si esplica in una tensione presente nell'avvolgimento elettrico legata ai flussi di induzione variabili e riassunta in forma schematica nella (2.1). Con riferimento a fig. 3.1 tale tensione vale

$$e(t) = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

se N è il numero delle spire concatenate con il circuito magnetico. Introducendo la nozione di flusso concatenato con l'avvolgimento, definito dalla relazione

$$\lambda = N \Phi \quad (3.2)$$

la (3.2) diviene

$$e(t) = \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.3)$$

Particolarmente interessante è la rappresentazione delle due azioni precedenti nei circuiti che usiamo per l'avvolgimento e per la struttura magnetica. Nel circuito elettrico equivalente che corrisponde al circuito magnetico, la prima azione è rap

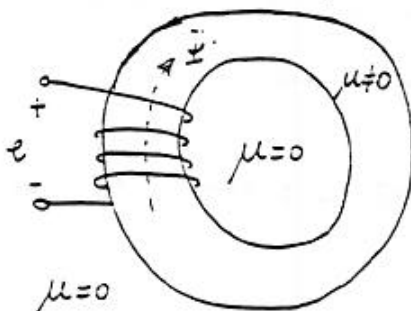


Fig. 3.1
Interazione fra una struttura magnetica ed un avvolgimento concatenato.

La rappresentazione delle strutture in esame mediante due circuiti legati tra di loro tramite generatori controllati è facilmente riconducibile ad un solo circuito di un solo tipo, se necessario. Ciò è spesso richiesto nel caso dell'avvolgimento, ai fini di una conoscenza chiara ed immediata del comportamento di questo. Tale richiesta è la causa dell'introduzione nei circuiti elettrici dell'induttore ideale.

L'operazione mediante la quale viene eliminata la parte magnetica ed introdotto di conseguenza l'induttore in quella elettrica consiste semplicemente nell'esprimere le grandezze magnetiche in funzione di quelle elettriche nella relazione costitutiva del generatore controllato che appare nella parte elettrica. In questo modo tale relazione costitutiva diviene quella dell'induttore ideale. Illustriamo quanto detto con un esempio.

Esempio 3.2

Analizzare il circuito magnetico mostrato in fig.3.3 ricavando il circuito elettrico equivalente e determinando l'induttanza che si vede tra i morsetti A e B dell'avvolgimento di eccitazione. Supponendo poi costante la corrente che percorre tale avvolgimento ($I=0,2$ A), determinare il flusso che attraversa la colonna centrale del circuito magnetico.

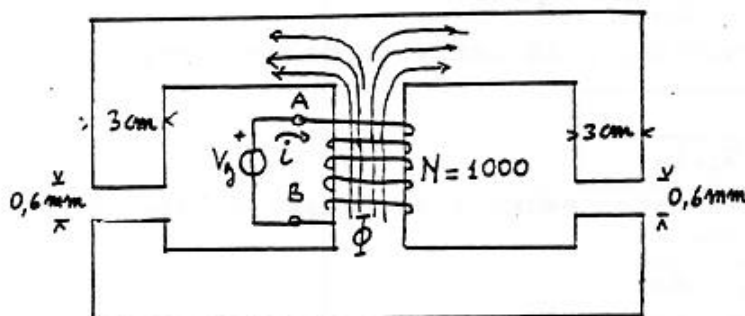


Fig.3.3

Circuito magnetico considerato nell'esempio 3.2. La struttura è simmetrica rispetto alla colonna centrale ed ha una profondità di 3 cm.

Il circuito equivalente della struttura considerata è mostrato in fig.3.4. Lo schema che corrisponde alla parte elettrica comprende un generatore di tensione, un resistore ed un generatore controllato che tiene conto dell'azione del circuito magnetico. Lo schema che corrisponde alla parte magnetica è costituito da due maglie, ciascuna delle quali comprende un resistore equivalente al tratto in ferro di riluttanza R_f in serie ad un altro resistore equivalente al tratto in aria di riluttanza R_a .