

Fig.4.1

Dispositivo considerato per la caratterizzazione energetica di un circuito magnetico.

dei flussi Φ e la curva che fornisce lo stato del bipolo magnetico nel piano Φ - U , come messo in evidenza in fig.4.2.

Un aspetto importante del comportamento energetico di un bipolo magnetico riguarda la capacità o meno di quest'ultimo di restituire l'energia assorbita. A questo proposito si distinguono tre casi in dipendenza della forma del legame Φ - U .

1° Caso: Relazione fra Φ e U di tipo lineare

Poiché la riluttanza è costante in questo caso, l'espressione (4.4) diviene

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \mathcal{R} \int_{t_1}^{t_2} \Phi d\Phi = \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 \right\}_{\Phi_1}^{\Phi_2} \quad (4.5)$$

La relazione precedente mette in evidenza che l'energia \mathcal{E} dipende solo dai valori di Φ corrispondenti agli istanti t_1 e t_2 e non dalla legge di variazione di $U(t)$. Ciò significa che la funzione \mathcal{E} è una funzione di stato. Di conseguenza

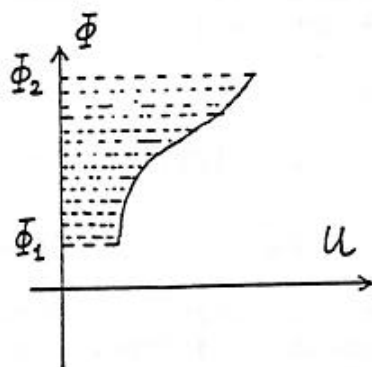


Fig.4.2

Interpretazione grafica dell'energia assorbita da un bipolo magnetico. I versi positivi di Φ ed U sono coordinati in modo che sia positiva l'energia assorbita.

La co-energia viene spesso utilizzata nello studio del comportamento energetico di una struttura, in quanto permette di mettere in evidenza aspetti complementari a quelli rilevabili con l'energia. Ciò è dovuto all'esistenza della seguente relazione tra le funzioni di stato in questione

$$e_{t_1}^{t_2} + c_{t_1}^{t_2} = \int_{\bar{\Phi}_1}^{\bar{\Phi}_2} U d\bar{\Phi} + \int_{U_1}^{U_2} \bar{\Phi} dU = \left[\bar{\Phi} U \right]_{t_1}^{t_2} \quad (4.11)$$

3° Caso: Relazione fra $\bar{\Phi}$ e U non lineare e polidroma

Questo è il caso tipico dei materiali ferromagnetici aventi ciclo d'isteresi di ampiezza non trascurabile. In tal caso il legame fra $\bar{\Phi}$ e U dipende dai valori $\bar{\Phi}_1$ e $\bar{\Phi}_2$ fra i quali oscilla il valore del flusso. La situazione tipica d'interesse è quella del ciclo di isteresi simmetrico che si verifica quando il flusso oscilla tra un valore $-\bar{\Phi}_1$ ed un valore $\bar{\Phi}_1$. Esaminiamo in dettaglio l'energia assorbita dal bipolo magnetico soggetto a questo tipo di isteresi quando il flusso subisce un'oscillazione completa. Con riferimento alla parte (a) di fig. 4.3 calcoliamo l'energia assorbita dal bipolo quando il flusso varia da $-\bar{\Phi}_1$ a $\bar{\Phi}_1$ mediante

$$e_{-\bar{\Phi}_1}^{\bar{\Phi}_1} = \int_{-\bar{\Phi}_1}^{\bar{\Phi}_1} U d\bar{\Phi} = A_2 - A_1 \quad (4.12)$$

Analogamente con riferimento alla parte (b) della fig. 4.3 calcoliamo l'energia assorbita quando il flusso varia da $\bar{\Phi}_1$ a $-\bar{\Phi}_1$ mediante

$$e_{\bar{\Phi}_1}^{-\bar{\Phi}_1} = \int_{\bar{\Phi}_1}^{-\bar{\Phi}_1} U d\bar{\Phi} = A_4 - A_3 \quad (4.13)$$

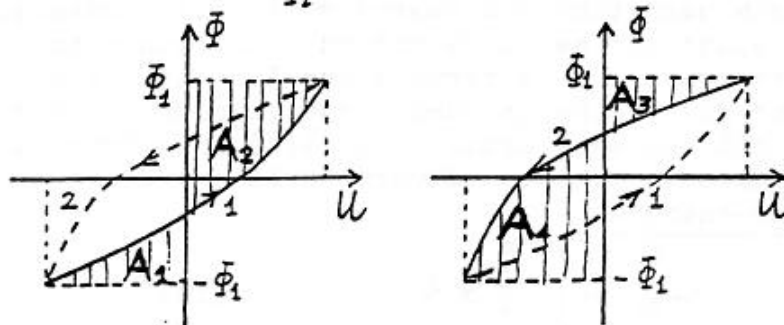


Fig. 4.3
Legame fra $\bar{\Phi}$
ed U nel caso
di isteresi
magnetica sim-
metrica.

In base all'analogia tra circuiti magnetici ed elettrici riassunta in tab.2.1, la (4.16) corrisponde alla relazione costitutiva di un induttore nell'ambito del circuito equivalente della struttura magnetica. Siamo perciò in presenza di un nuovo elemento ideale, che verrà rappresentato nel seguito mediante il simbolo di un induttore e verrà denominato "induttore magnetico".

Per controllare la validità del componente introdotto, facciamo vedere come, in un dispositivo costituito da un circuito magnetico concatenato con un avvolgimento, la presenza del suddetto componente equivale ad un resistore in parallelo all'induttore, nel circuito equivalente dal lato dell'avvolgimento. Con riferimento a fig.3.1, supponiamo che sia diversa da zero la conducibilità della regione magnetica. Lo schema equivalente globale del dispositivo si modifica allora, rispetto a quello considerato in fig.3.2, come mostrato in fig.4.4.

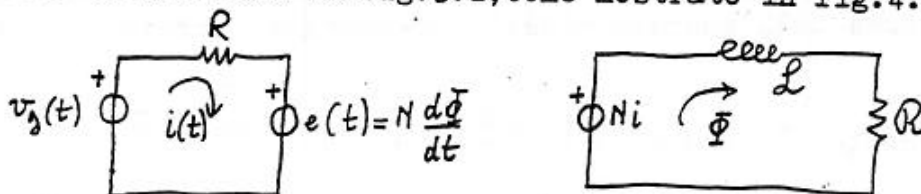


Fig.4.4 Schema equivalente globale del dispositivo di fig.3.1, quando la conducibilità della regione magnetica è diversa da zero.

Il legame tra tensione e corrente dal lato dell'avvolgimento risulta deducibile da

$$\begin{aligned} v_g &= R i(t) + N \frac{d\Phi}{dt} \\ N i &= \mathcal{R} \Phi + \mathcal{L} \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (4.17)$$

che, nel dominio di Laplace, supponendo L-trasformabili le grandezze in esame e nulle le condizioni iniziali, diviene

$$\begin{aligned} V_g(s) &= R I + s N \Psi \\ N I &= (\mathcal{R} + s \mathcal{L}) \Psi \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\Psi = \mathcal{L}\{\Phi(t)\}(s)$$

E' evidente che l'unico legame tra la parte elettrica e quella magnetica è rappresentato dai due generatori controllati; solo attraverso essi avvengono gli scambi energetici fra i due circuiti. In particolare il circuito elettrico cede a quello magnetico una potenza complessa pari a

$$\underline{P}_c = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{I}^* \quad (5.1)$$

Tale potenza può essere facilmente espressa in termini di grandezze magnetiche; infatti si ha

$$\underline{P}_c = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{I}^* = \frac{1}{2} j\omega N \underline{\Phi} \underline{I}^* = \frac{1}{2} j\omega \underline{U} \underline{\Phi}^* \quad (5.2)$$

dove \underline{U} è la tensione magnetica e $\underline{\Phi}$ è il flusso. Dalla (5.2) si ottengono le espressioni della potenza attiva e reattiva assorbite dal circuito magnetico, cioè

$$P_a = \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{E} \underline{I}^*] = \frac{1}{2} \omega \text{Im}[\underline{U} \underline{\Phi}^*] \quad (5.3)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \text{Im}[\underline{E} \underline{I}^*] = \frac{1}{2} \omega \text{Re}[\underline{U} \underline{\Phi}^*] \quad (5.4)$$

Queste due formule mettono in evidenza che nel circuito magnetico la potenza reattiva dipende dalla componente di \underline{U} in fase con $\underline{\Phi}$ mentre la potenza attiva dipende dalla componente in quadratura, a differenza di quanto accade nei circuiti elettrici. Ad esempio, nel caso del diagramma vettoriale relativo al dispositivo di fig. 3.1 mostrato in fig. 5.1, si vede che il circuito magnetico assorbe solo potenza reattiva, poiché \underline{U} e $\underline{\Phi}$ sono in fase fra loro.

Dalla (5.4) si può anche ricavare quanto vale l'energia magnetica media immagazzinata nel circuito magnetico. Infatti dalla relazione fra la potenza reattiva e l'energia media (cfr. formula 5.5.44 G. Martinelli, M. Salerno, "Fondamenti di Elettrotecnica", Ed. Siderea, 1979), si ottiene

$$\overline{\mathcal{E}}_M = \frac{1}{2\omega} P_r = \frac{1}{4} \text{Re}[\underline{U} \underline{\Phi}^*] \quad (5.5)$$

$$P_f = A f V g(B_{\max}) \quad (5.10)$$

in cui A è un coefficiente che dipende dalla natura del materiale.

L'espressione usuale di $g(B_{\max})$ viene ricavata per via empirica e quella più usata è del tipo

$$g(B_{\max}) = B_{\max}^n \quad (5.11)$$

$$1,6 \leq n \leq 2$$

L'isteresi magnetica è un fenomeno non lineare e quindi rende in via di principio inapplicabile il metodo dei fasori. Tuttavia, nei limiti di funzionamento usuali, è possibile ancora applicare tale metodo, in quanto l'induzione che interessa il materiale dipende molto poco dalle variazioni previste delle condizioni di funzionamento. Ciò implica che la potenza dissipata per isteresi può essere considerata con buona approssimazione costante e può essere simulata nel circuito magnetico con un componente (induttore magnetico) lineare. La derivazione in questione è molto semplice in base alla (5.7); è sufficiente infatti uguagliare la (5.7), in cui è stata esplicitata l'induttanza \mathcal{L} , alla (5.10). Si ha

$$\frac{1}{2} \omega^2 \mathcal{L} |\bar{\Phi}|^2 = A f V g(B_{\max}) \quad (5.12)$$

e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi^2} A V \frac{g(B_{\max})}{f |\bar{\Phi}|^2} \quad (5.13)$$

Il valore di \mathcal{L} è costante solo nella situazione prevista in cui B_{\max} e quindi $\bar{\Phi}$ sono costanti.

Le altre perdite che si hanno nel materiale magnetico sono quelle dovute ad una conducibilità elettrica diversa da zero nel suo interno. Tali perdite possono essere schematizzate con un induttore lineare come messo in evidenza nel par. 4. Per ridurre la loro entità nelle applicazioni di alta frequenza si ricorre a materiali ferromagnetici ad alta resistività (ferriti) e nelle altre applicazioni costruendo il nucleo ferro-

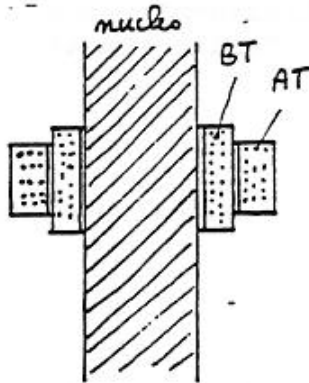


Fig.6.2

Disposizione degli avvolgimenti su una colonna di un trasformatore reale:

BT = avvolgimento di bassa tensione

AT = avvolgimento di alta tensione.

Di seguito considereremo in dettaglio la derivazione dello schema equivalente globale della struttura di fig.6.1 e dello schema equivalente dal lato elettrico, ottenuto dopo eliminazione della parte magnetica, secondo la tecnica illustrata nel par.3 per l'induttore. Nel par.7 considereremo in dettaglio il caso del trasformatore di potenza sia monofase che trifase, precisando i limiti di validità del circuito equivalente ed il modo di individuarlo. Nel par.8 considereremo il trasformatore telefonico, illustrando brevemente le prestazioni ad esso richieste ed il modo per determinarle mediante il circuito equivalente. Infine nel par.9 esamineremo il processo di idealizzazione che ha portato all'introduzione nei circuiti a costanti concentrate degli elementi ideali "induttori mutuamente accoppiati" e "trasformatore ideale", partendo dalla struttura di base mostrata in fig.6.1.

6.1 Circuito equivalente globale del trasformatore

Il dispositivo che consideriamo è mostrato schematicamente in fig.6.3. I due avvolgimenti concatenati sono caratterizzati ciascuno da una tensione v_k , una corrente i_k , un numero di spire N_k ed una resistenza R_k con $k=1,2$, dove $k=1$ indica il primario e $k=2$ il secondario.

La struttura magnetica è costituita da un nucleo omogeneo ad alta permeabilità in cui si concentra la maggior parte delle linee di forza dell'induzione. Indichiamo con Φ il flusso relativo, che si concatena con ambedue gli avvolgimenti. Le rimanenti linee di forza dell'induzione seguono percorsi in aria e si concatenano solo con alcune spire dell'uno o del-

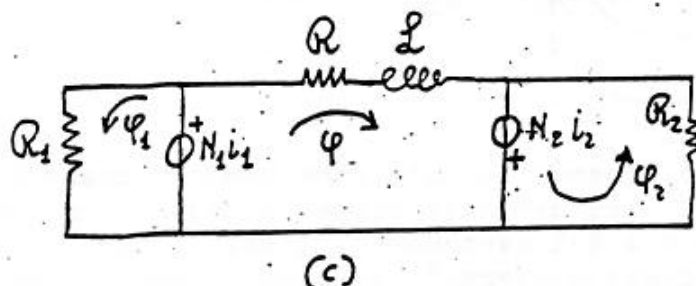
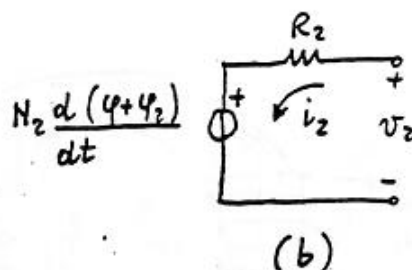
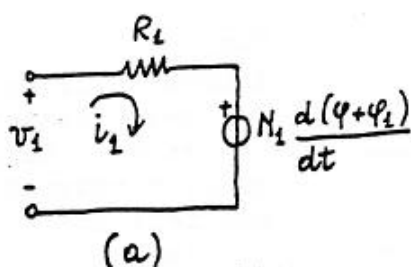


Fig.6.4
Circuito equivalente globale del trasformatore. La parte elettrica è riportata in (a) e (b), la parte magnetica in (c).

$$\text{parte magnetica} \begin{cases} N_1 I_1(s) = R_1 \Phi_1(s) \\ N_2 I_2(s) = R_2 \Phi_2(s) \\ N_1 I_1(s) + N_2 I_2(s) = (R + sL) \Phi(s) \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{parte elettrica} \begin{cases} V_1(s) = R_1 I_1(s) + sN_1 [\Phi(s) + \Phi_1(s)] \\ V_2(s) = R_2 I_2(s) + sN_2 [\Phi(s) + \Phi_2(s)] \end{cases} \quad (6.2)$$

6.2 Circuito equivalente elettrico del trasformatore

Lo schema impiegato usualmente per descrivere il trasformatore viene ottenuto eliminando la parte magnetica con un procedimento simile a quello seguito nel par.3 per introdurre l'induttore. Lo schema risultante prende il nome di "circuito equivalente elettrico del trasformatore".

Il procedimento consiste nel ricavare Φ_1, Φ_2, Φ dalle (6.1) e nel sostituire le relative espressioni nelle (6.2), ricavando in questo modo la descrizione del dispositivo di fig. (6.1) come rete 2-porte mediante la matrice impedenze a vuoto $[Z]$. Dall'esame del tipo di matrice ottenuto si risale senza

$$[Z_2] = \frac{s N_1^2}{R + sL} \begin{bmatrix} 1 & \frac{N_2}{N_1} \\ \frac{N_2}{N_1} & \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Il circuito equivalente cercato è quindi la serie di due reti due-porte. La prima, che ha la matrice impedenze a vuoto coincidente con $[Z_1]$, ha lo schema di fig. 6.5, come si deduce direttamente per ispezione visiva.

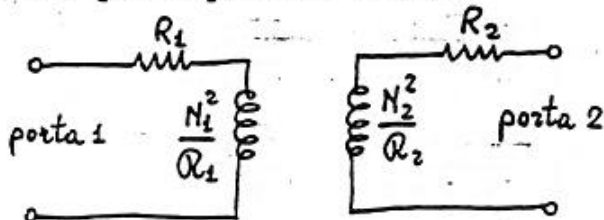


Fig. 6.5
Rete due-porte che ha $[Z_1]$ come matrice impedenze a vuoto.

Per individuare lo schema della seconda rete due-porte, che è rappresentata dalla matrice impedenze a vuoto $[Z_2]$, occorre tenere presenti le seguenti due osservazioni:

1) l'impedenza

$$Z_o = \frac{s N_1^2}{R + sL} \quad (6.8)$$

Può essere scritta come

$$Z_o = \frac{1}{\frac{R}{s N_1^2} + \frac{L}{N_1^2}} \quad (6.9)$$

cioè come l'impedenza del parallelo di due bipoli aventi ammettenza rispettivamente

$$\frac{R}{s N_1^2}, \quad \frac{L}{N_1^2} \quad (6.10)$$

Si vede facilmente che il primo bipolo è un induttore di induttanza N_1^2/R ed il secondo un resistore di resistenza N_1^2/L .

interessano le grandezze elettriche solo del primario ed il secondo schema quando interessano solo quelle del secondario.

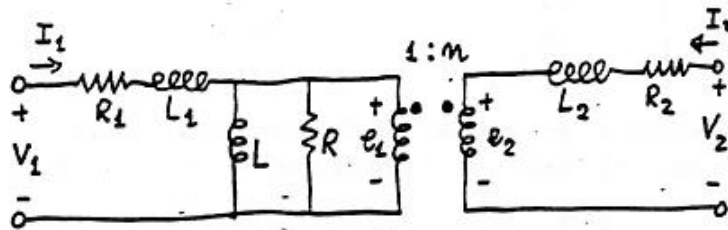


Fig.6.7
Circuito equivalente elettrico del trasformatore.

Tab.6.1 Significato e valore dei componenti del circuito equivalente del trasformatore di fig.6.7.

Componente	Valore	Significato
R_1	R_1	resistenza elettrica del primario
R_2	R_2	resistenza elettrica del secondario
L_1	N_1^2/Q_1	induttanza dispersa del primario
L_2	N_2^2/Q_2	induttanza dispersa del secondario
L	N_1^2/Q	induttanza di magnetizzazione vista dal primario
R	N_1^2/\mathcal{L}	resistenza di perdita del circuito magnetico vista dal primario
n	N_2/N_1	rapporto tra il numero delle spire del secondario e quello del primario

cuni di essi vanno rilevati nell'ambito delle precauzioni dette in precedenza. La determinazione dei suddetti valori per via analitica in fase di progetto richiede l'individuazione della distribuzione dell'induzione nel materiale magnetico. I metodi per fare ciò esulano dalla presente trattazione, per cui ci limitiamo a descrivere le tecniche usate per ricavare tali valori attraverso opportune serie di misure sul dispositivo già costruito. Le tecniche più usate si riferiscono a due situazioni tipiche di funzionamento, con secondario aperto ed in corto-circuito rispettivamente. In ambedue i casi occorre tenere presenti le precauzioni riguardanti l'uso del metodo dei fasori in un contesto non lineare. Di ciò parleremo in dettaglio nel par. 7.2. Nel par. 7.3 descriveremo i diagrammi vettoriali più usati nell'applicazione grafica del metodo dei fasori all'analisi del trasformatore.

Quanto detto nei primi tre paragrafi riguarda il trasformatore a due avvolgimenti, considerato sin dall'inizio nel par. 6. Nelle applicazioni di grande potenza, tuttavia, è usuale l'impiego di strutture più complesse, quali emergono dall'uso di sistemi trifase di grandezze elettriche. La struttura tipica usata in questo caso è il trasformatore trifase, che verrà descritto brevemente nel par. 7.4.

7.1 Limiti di validità del circuito equivalente del trasformatore di potenza in regime permanente sinusoidale

La situazione tipica di impiego del trasformatore di potenza prevede l'eccitazione con un generatore di tensione sinusoidale e la chiusura su un carico lineare. Quello che interessa determinare è la soluzione in regime permanente con particolare riguardo al rendimento di potenza attiva ed alle variazioni della tensione sul carico al variare di questo entro i limiti previsti di funzionamento. Tali condizioni sono caratterizzate da un'ampiezza costante della tensione di alimentazione (tensione nominale del primario), da una frequenza costante dell'eccitazione, da un valore di potenza attiva erogata dal generatore minore od uguale ad un valore massimo (potenza nominale) e da un valore di corrente erogata di ampiezza inferiore od uguale ad un valore massimo (corrente nominale).

Il dispositivo viene proporzionato in modo che il flusso principale φ segua un percorso caratterizzato da una riluttanza molto bassa con perdite nel nucleo magnetico coinciden-