

4. Energia nei circuiti magnetici e co-energia

La comprensione dei fenomeni energetici implicati in un circuito magnetico si semplifica notevolmente se si analizza attraverso l'interazione avvolgimento concatenato-circuito magnetico, messa in evidenza nel paragrafo precedente. La caratterizzazione energetica di un circuito magnetico, infatti, può essere fatta in questo modo utilizzando ciò che avviene nell'ambito dell'avvolgimento e quindi mediante le usuali tecniche disponibili per i circuiti elettrici. A questo scopo si consideri il dispositivo mostrato in fig. 4.1. Tale dispositivo è costituito da un avvolgimento di N spire, eccitato da un generatore di corrente $i(t)$ e concatenato ad un nucleo magnetico di riluttanza \mathcal{R} . Supponiamo inoltre che non si abbiano perdite sia nell'avvolgimento sia nel materiale magnetico.

L'energia elettrica erogata dal generatore di corrente in un intervallo di tempo t_1, t_2 è

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} e(t) i(t) dt \quad (4.1)$$

dove $e(t)$ è la tensione ai capi del generatore.

Per l'ipotesi fatta di avvolgimento privo di perdite, la tensione $e(t)$ è dovuta soltanto alla variazione del flusso concatenato, cioè in base alla (3.3)

$$e(t) dt = d\lambda = N d\bar{\Phi} \quad (4.2)$$

D'altra parte la forza magnetomotrice $U(t)$ associata al circuito magnetico d'interesse è uguale a

$$U(t) = N i(t) \quad (4.3)$$

Sostituendo le (4.2) e (4.3) nella (4.1) si ottiene

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} U(t) d\bar{\Phi} \quad (4.4)$$

L'espressione (4.4) rappresenta l'energia assorbita nell'intervallo t_1, t_2 dal bipolo magnetico sottoposto al flusso $\bar{\Phi}$ ed alla tensione magnetica U . Da un punto di vista grafico essa può essere interpretata come l'area compresa tra l'asse

l'energia può essere integralmente restituita al circuito elettrico. In base alla (2.20) l'energia può essere espressa mediante le seguenti formule equivalenti

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \left\{ \frac{1}{2} \Phi U \right\}_{\Phi_1}^{\Phi_2} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \right\}_{U_1}^{U_2} \quad (4.7)$$

E' opportuno osservare che nel caso presente l'integrale (4.4) può essere scritto nella seguente formula equivalente

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi dU \quad (4.8)$$

avendo scambiato fra loro U e Φ .

2° Caso: Relazione fra Φ e U non lineare ma monodroma

L'integrale (4.4) in questo caso non può essere risolto in modo immediato, poiché la riluttanza è una quantità dipendente da Φ , cioè

$$\mathcal{E}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi R(\Phi) d\Phi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \Phi Q(\Phi) d\Phi \quad (4.9)$$

Poiché la funzione $Q(\Phi)$ è monodroma il valore dell'integrale dipende solo dai valori Φ_2 e Φ_1 corrispondenti rispettivamente agli istanti t_2 e t_1 e non dalla legge di variazione di $\Phi(t)$. Anche in questo caso quindi l'energia è una funzione di stato e l'energia magnetica può essere restituita integralmente al circuito elettrico se si fa ritorno allo stato iniziale. E' opportuno osservare che le formule semplificate (4.5), (4.6) e (4.7) non sono più valide in questo caso; inoltre l'energia non può essere più espressa tramite la (4.8). Tale formula rappresenta una funzione di stato, diversa dall'energia, a cui si dà il nome di co-energia:

$$C_{t_1}^{t_2} = \int_{U_1}^{U_2} \Phi dU \quad (4.10)$$

Tenendo conto dell' (4.12) e (4.13) si deduce che l'energia assorbita dal bipolo sottoposto ad un ciclo completo di variazione simmetrica di induzione è uguale a

$$\mathcal{E}_{\text{ciclo}} = \oint U d\Phi = A_2 - A_1 + A_4 - A_3 > 0 \quad (4.14)$$

cioè coincide con l'area compresa fra le due curve seguite dal punto rappresentativo dello stato del bipolo magnetico nel piano Φ - U durante il ciclo. Tale energia corrisponde ad energia dissipata nel materiale magnetico. Ciò mette in evidenza che nel caso presente l'energia non è una funzione di stato.

Un risultato analogo si ottiene per la co-energia. Tuttavia è facile rendersi conto che risulta una funzione di stato la somma dell'energia e della co-energia. Infatti si ha

$$\mathcal{E}_{\text{ciclo}} + \mathcal{C}_{\text{ciclo}} = \oint (U d\Phi + \Phi dU) = \oint d(U\Phi) = 0 \quad (4.15)$$

4.1 Le perdite nei circuiti magnetici

L'ipotesi fatta all'inizio di avere una conducibilità elettrica $\gamma=0$ entro le regioni della struttura magnetica in esame è spesso troppo limitativa. Tale ipotesi può essere rimossa, osservando che se la conducibilità è diversa da zero, allora nella (2.2), oltre a \vec{J} impresso alla regione magnetica dall'esterno, si ha un termine $\gamma\vec{E}$ interno alla regione stessa. Tenendo conto che \vec{J} dà origine ad una forza magnetomotrice si comprende che $\gamma\vec{E}$ dà invece origine ad una tensione magnetica che si somma a quella espressa da $\mathcal{R}\Phi$, vista nella (2.20). Tale ulteriore tensione magnetica, in base alla (2.1) è proporzionale alla $\partial B / \partial t$ e quindi in forma globale alla $\partial \Phi / \partial t$. Dalla discussione qualitativa fatta si deduce che le perdite associate ad un circuito magnetico dovute ad un valore della conducibilità diverso da zero possono essere tenute in conto mediante un elemento ideale del circuito magnetico caratterizzato dalla relazione costitutiva

$$U = \mathcal{L} \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.16)$$

Si ottiene perciò per l'impedenza vista dal generatore di tensione v_g

$$\frac{V_g(s)}{I(s)} = R + \frac{N^2 s}{\mathcal{R} + s\mathcal{L}} \quad (4.19)$$

che equivale al bipolo di fig.4.5.

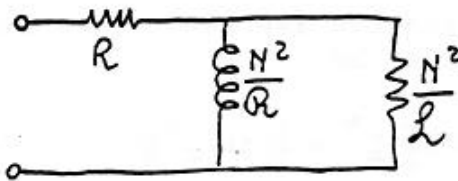


Fig.4.5
Bipolo visto dal generatore di tensione v_g .

Si vede chiaramente da questa figura che la presenza del componente \mathcal{L} nel circuito magnetico determina la presenza di un resistore di resistenza

$$N^2 / \mathcal{L} \quad (4.20)$$

nel circuito visto dalla parte dell'avvolgimento. Ciò conferma la validità dell'introduzione del suddetto componente per tenere conto delle perdite nell'interno di un circuito magnetico.

5. Regime permanente sinusoidale nei circuiti magnetici

Nell'ipotesi che la struttura magnetica in esame sia lineare e permanente e che si possa parlare di risposta permanente, è possibile analizzare il circuito magnetico con il metodo dei fasori. Con riferimento al dispositivo di fig.3.1 ed al circuito equivalente di fig.3.2, si ha per i relativi fasori e nell'ipotesi che non ci siano perdite nel circuito magnetico la situazione di fig.5.1.

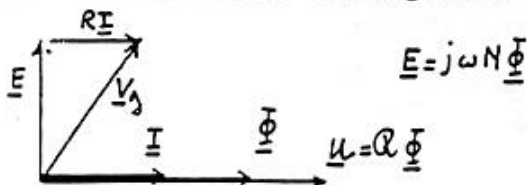


Fig.5.1
Diagramma vettoriale relativo al circuito di fig.3.2.

Nel caso che nel circuito magnetico siano presenti perdite, come messo in evidenza nel par.4., il circuito equivalente globale del dispositivo di fig.3.1 diviene quello di fig.4.4. In questo caso si ottiene una riluttanza complessa uguale a:

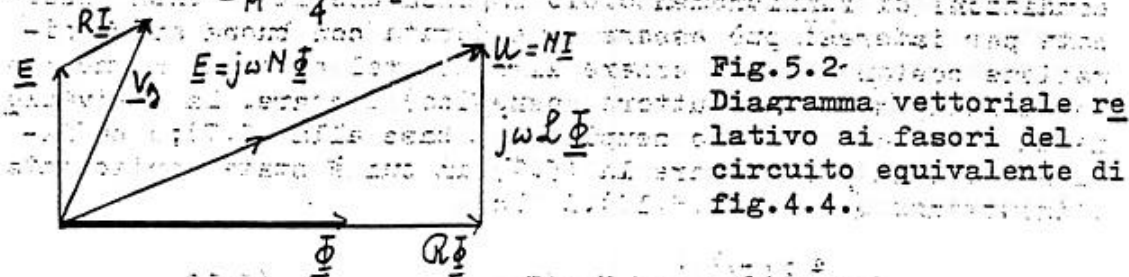
$$\underline{R} = R + j\omega L \quad (5.6)$$

ed il diagramma vettoriale nel piano dei fasori si modifica da quello mostrato in fig.5.1. a quello di fig.5.2. Tenendo conto della riluttanza complessa le formule (5.3), (5.4) e (5.5) divengono

$$P_a = \frac{1}{2} \omega \text{Im}[\underline{R}] |\underline{\Phi}|^2 \quad (5.7)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \omega \text{Re}[\underline{R}] |\underline{\Phi}|^2 \quad (5.8)$$

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{4} \text{Re}[\underline{R}] |\underline{\Phi}|^2 \quad (5.9)$$



5.1 Potenza dissipata nel materiale magnetico in regime permanente sinusoidale

Nel par.4 abbiamo visto che un materiale ferromagnetico sottoposto ad una variazione periodica di flusso dissipa energia per effetto dell'isteresi magnetica in quantità uguale all'area racchiusa dalla curva percorsa dal punto che rappresenta lo stato del materiale nel piano Φ - U durante il ciclo. Tale area dipende dalla natura del materiale e dall'ampiezza massima dell'induzione (flusso). Quindi la potenza dissipata ha la seguente forma nel caso che la frequenza dell'eccitazione sia f e che il volume di materiale interessato sia V

magnetico sotto forma di pacchi di lamierini di spessore sufficientemente piccolo, disposti parallelamente alla direzione del campo magnetico. In questo modo è facile rendersi conto che la potenza dissipata vale

$$C V (b f B_{\max})^2 \quad (5.14)$$

in cui b è lo spessore dei lamierini e C una costante che dipende dal materiale.

6. Il trasformatore: generalità e circuito equivalente

Il trasformatore è costituito da due o più avvolgimenti concatenati con uno stesso circuito magnetico. Nelle applicazioni di potenza (trasformatore di potenza) esso viene utilizzato come convertitore statico di energia elettrica ad altissimo rendimento, rendendo possibile la generazione, il trasporto e l'utilizzazione di tale energia nella forma (tensione e corrente) più idonea dal punto di vista tecnico-economico.

Nelle applicazioni riguardanti gli apparati di telecomunicazioni, di misura e di controllo il trasformatore è impiegato come trasformatore di impedenza. In tali applicazioni ciò che importa non è il rendimento energetico, ma l'uniformità del trasferimento in tensione.

Il tipo più semplice di trasformatore è costituito da due avvolgimenti, denominati rispettivamente primario e secondario. Lo schema di principio di tale trasformatore è mostrato in fig. 6.1.

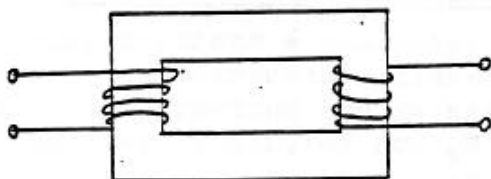


Fig. 6.1
Schema di principio del trasformatore a due avvolgimenti.

In molti casi la struttura effettiva del trasformatore è molto vicina a quella di fig. 6.1, salvo che gli avvolgimenti primario e secondario non sono avvolti separatamente su due colonne differenti del nucleo, ma concentricamente su una stessa colonna, come mostrato in fig. 6.2.

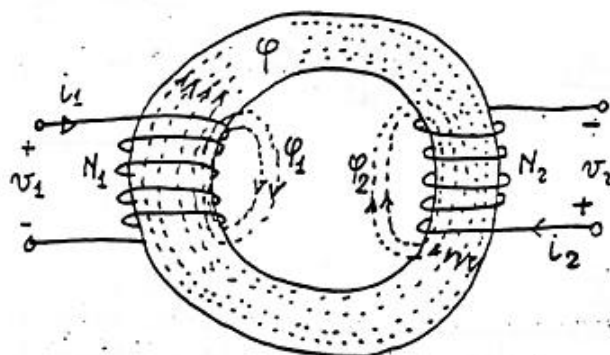


Fig.6.3

Schema di principio del trasformatore con in evidenza le grandezze elettriche e magnetiche che si utilizzano per la sua analisi.

l'altro avvolgimento. Schematicamente esse vengono riassunte in due flussi Φ_1 e Φ_2 , concatenati rispettivamente con tutte le spire del primario e del secondario. A tali flussi Φ_1 e Φ_2 si dà il nome di "flussi dispersi", in quanto costituiscono un contributo non voluto rispetto a quello principale Φ .

Per quanto detto il circuito magnetico corrispondente alla struttura d'interesse comprende tre maglie percorse dai flussi Φ , Φ_1 , Φ_2 , come indicato nella parte (c) di fig.6.4. Le forze magnetomotrici sono concordi nella loro azione sul flusso principale Φ per la scelta particolare dei versi delle correnti i_1 e i_2 . E' evidente però che una scelta diversa avrebbe di conseguenza modificato tale situazione, cambiando l'orientazione della corrispondente forza magnetomotrice. E' da notare inoltre come in tale schema sia presente un solo induttore magnetico; ciò è dovuto al fatto che solo il flusso principale Φ ha un percorso interamente nel materiale magnetico. I due flussi dispersi hanno invece un percorso essenzialmente in aria e quindi ad essi non sono associate perdite. In conclusione quindi la parte magnetica è caratterizzata dalle riluttanze R_1, R_2 relative ai flussi dispersi, da R ed L relativi al flusso principale Φ .

Le equazioni che descrivono il dispositivo di fig.6.3 secondo il circuito equivalente di fig.6.4 sono nel dominio di Laplace, supponendo che tale circuito sia lineare ed a riposo:

difficoltà al circuito equivalente.

Le espressioni dei flussi che si deducono dalle (6.1) sono

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_1} \\ \Phi_2 &= \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_2} \\ \Phi &= \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R} + sL}\end{aligned}\quad (6.3)$$

Sostituendo le (6.3) nelle (6.2), si ha

$$\begin{aligned}V_1 &= R_1 I_1 + sN_1 \left[\frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R} + sL} + \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_1} \right] \\ V_2 &= R_2 I_2 + sN_2 \left[\frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R} + sL} + \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_2} \right]\end{aligned}\quad (6.4)$$

Le (6.4) coincidono con le relazioni di definizione di una rete due-porte avente la seguente rappresentazione matrice impedenze a vuoto

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + s \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1} + s \frac{N_1^2}{\mathcal{R} + sL} & s \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R} + sL} \\ s \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R} + sL} & R_2 + s \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_2} + s \frac{N_2^2}{\mathcal{R} + sL} \end{bmatrix}\quad (6.5)$$

Tale matrice si può suddividere nella somma delle seguenti due

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} R_1 + s \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1} & 0 \\ 0 & R_2 + s \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_2} \end{bmatrix}\quad (6.6)$$

2) la matrice impedenze a vuoto

$$[Z] = Z_0 \begin{bmatrix} 1 & n \\ n & n^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

rappresenta indifferentemente una qualsiasi delli reti due-
porte di fig.6.6, come si deduce direttamente per ispezione vi
siva.

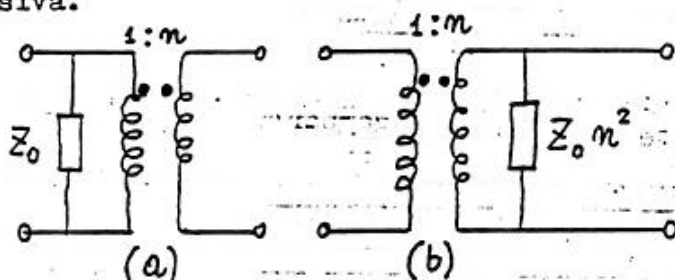


Fig.6.6
Reti due-
por
te aventi co-
me matrice im-
pedenze a vu-
to la (6.11).

Utilizzando le due osservazioni precedenti ed osservando che
le due reti due-porte di fig.6.5 e 6.6 soddisfano in ogni
caso le prove di validità della connessione serie-serie, si ot-
tiene per il trasformatore il circuito equivalente di fig.6.7,
avendo scelto per la seconda rete lo schema (a), come viene
fatto usualmente. Il significato dei vari componenti che fanno
parte del circuito equivalente è spiegato dettagliatamente
in tab.6.1, che risulta giustificata in base a quanto detto in
precedenza.

Osservazione 6.1

Utilizzando lo schema (b) di fig.6.6 per la seconda rete
si ottiene un circuito equivalente elettrico diverso per il
trasformatore, caratterizzato dal fatto che l'induttore di ma-
gnetizzazione ed il resistore che rappresenta le perdite del
nucleo magnetico sono disposti dal lato del secondario.

E' opportuno tenere presente che nelle applicazioni si
utilizzano spesso circuiti equivalenti diversi per il trasfor-
matore, ottenuti eliminando il trasformatore ideale dallo sche-
ma di fig.6.7 e riportando sia le grandezze elettriche sia i
componenti tutti al primario o tutti al secondario. Si otten-
gono in questo modo i due schemi di fig.6.8 e 6.9 che si ri-
feriscono rispettivamente al caso del riporto al primario ed
al secondario. E' evidente che il primo schema è utile quando

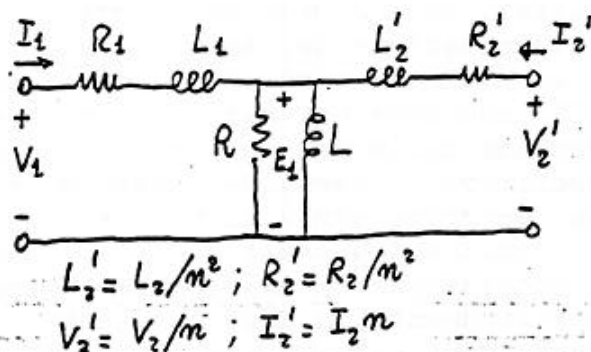


Fig.6.8

Circuito equivalente del trasformatore quando le grandezze elettriche ed i componenti sono riportati al primario.

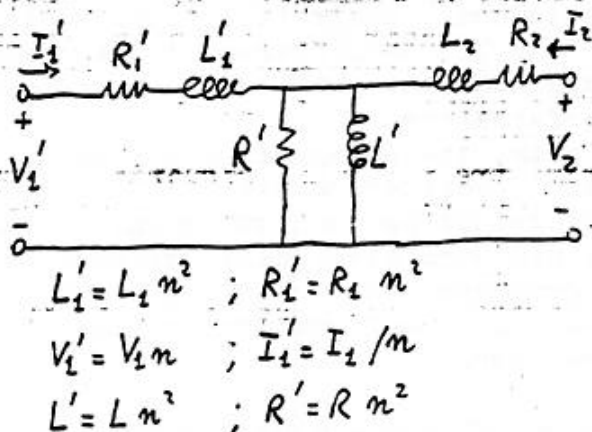


Fig.6.9

Circuito equivalente del trasformatore quando le grandezze elettriche ed i componenti sono riportati al secondario.

7. Trasformatore di potenza

Nelle applicazioni dove è in gioco una potenza notevole, il trasformatore è realizzato mediante un nucleo laminato di materiale ferromagnetico ad alta permeabilità in cui il valore dell'induzione viene mantenuto elevato compatibilmente con l'esigenza di ridurre le sue dimensioni e di avere perdite limitate per isteresi. In ogni caso il fenomeno dell'isteresi è rilevante e quindi l'utilizzazione del metodo dei fasori nell'analisi in regime permanente richiede il verificarsi di alcune condizioni, tipiche del funzionamento reale, ed il soddisfacimento di opportune precauzioni. Esamineremo questo punto nel par.7.1.

Una volta che sia accertata la possibilità di usare il metodo dei fasori, sorge il problema di individuare i valori dei componenti del circuito equivalente, tenendo conto che al