

# Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

*Simone Fiori*

Facoltà di Ingegneria, Università di Perugia

E-mail: `fiori@unipg.it`

**Pagine: 17, Figure: 6**

**Dispense per il corso di:**

Elettrotecnica

CdL Breve in Ingegneria Meccanica – Università Politecnica delle Marche

18 Maggio 2005

## Parte II: Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

*Simone Fiori*

### Sommario

Sistemi lineari e tempo-invarianti (LTI): Risposta all'impulso e rappresentazione convoluzionale. Proprietà dell'operatore di convoluzione e loro interpretazioni sistemistiche. Verifica delle proprietà fondamentali tramite analisi della risposta all'impulso. Autofunzioni dei circuiti LTI: Autofunzioni armoniche e trasformata di Fourier. Autofunzioni generiche e trasformata di Laplace per sistemi causali.

## 1 Sistemi LTI: Risposta all'impulso e convoluzione

In questa dispensa vengono studiati in dettaglio i sistemi che godono di due proprietà fondamentali: Linearità e tempo-invarianza. In questo caso, è possibile caratterizzare in modo stringente la struttura dell'operatore  $L\{\cdot\}$  che descrive il comportamento ingresso-uscita del sistema attraverso una operazione detta *integrale di convoluzione* o, semplicemente, convoluzione.

### 1.1 Risposta all'impulso e rappresentazione convoluzione

Si inizi con l'osservare che, grazie alla proprietà di campionamento dell'impulso matematico, un segnale  $x(t)$  può essere scritto come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau . \quad (1)$$

Tale espressione può essere interpretata come la scomposizione del segnale  $x(t)$  nella combinazione lineare di (una infinità non numerabile di) segnali elementari  $\delta(\tau - t)$  tramite i coefficienti della combinazione  $x(\tau)$ . Grazie alla proprietà di simmetria della 'delta', si vede poi che la precedente relazione è equivalente a:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau . \quad (2)$$

Si inserisce ora la precedente scomposizione nella relazione ingresso-uscita  $y = L\{x\}$ , ottenendo (con lieve abuso di notazione):

$$L\{x(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)L\{\delta(t-\tau)\}d\tau, \quad (4)$$

per la linearità dell'operatore  $L\{\cdot\}$ .

Convieni ora definire la seguente quantità:

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} L\{\delta(\cdot)\}(t), \quad (5)$$

che nella teoria dei sistemi LTI riveste una grande importanza e viene detta *risposta all'impulso*, perché rappresenta la risposta (uscita) del sistema quando l'ingresso ha la forma di un impulso matematico. Tale segnale viene talvolta detto *risposta impulsiva*.

Dal momento che l'operatore  $L\{\cdot\}$  è, per ipotesi, tempo-invariante, vale l'identità  $L\{\delta(\cdot-\tau)\}(t) = h(t-\tau)$ , pertanto, dalle relazioni precedenti si ha anche:

$$y(t) = L\{x(\cdot)\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (6)$$

che rappresenta l'integrale di convoluzione. In notazione abbreviata, si introduce l'operatore di convoluzione  $\otimes$ , grazie al quale la relazione precedente si scrive  $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ .

Un generico sistema LTI verrà, nel seguito, rappresentato con il simbolo mostrato in Figura 1.

## 1.2 Risposta al gradino

Calcolare la risposta all'impulso di un sistema LTI, specialmente nel caso in cui questo sia descritto da una relazione ingresso-uscita di tipo differenziale, non è sempre agevole. Con l'obiettivo di semplificare il calcolo della risposta impulsiva, si può calcolare allora dapprima la *risposta al gradino* del sistema,

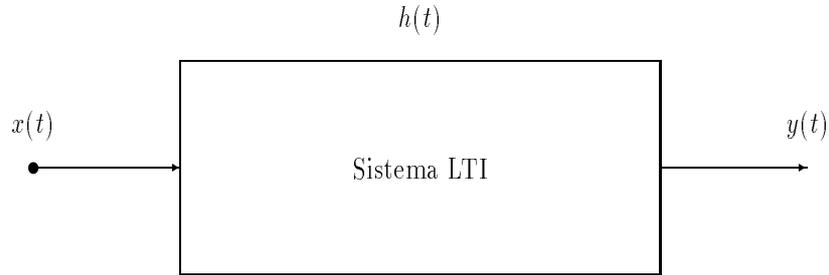


Figura 1: Generico sistema LTI con segnale di ingresso  $x(t)$ , segnale di uscita  $y(t)$  e risposta all'impulso  $h(t)$ .

definita come  $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} L\{u(\cdot)\}(t)$ , e in seguito la risposta impulsiva  $h(t)$ , che è legata alla risposta al gradino dalla relazione:

$$h(t) = \frac{d}{dt}g(t) . \quad (7)$$

Tale identità può essere mostrata tramite la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} h(t) &= L\{\delta(\cdot)\}(t) = L\left\{\frac{d}{dt}u(\cdot)\right\}(t) \\ &= L\left\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(\cdot + \varepsilon) - u(\cdot)}{\varepsilon}\right\}(t) \\ &\quad (\text{per ipotesi, l'operatore } L\{\cdot\} \text{ risulta lineare e tempo-invariante,} \\ &\quad \text{quindi:}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\varepsilon} L\{u(\cdot)\}(t + \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} L\{u(\cdot)\}(t) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [g(t + \varepsilon) - g(t)] \\ &= \frac{d}{dt}g(t) . \end{aligned}$$

Come esempio, si può applicare la precedente teoria al calcolo della risposta impulsiva del circuito illustrato in Figura 2, già studiato nella Parte I. L'equazione descrittiva di tale circuito è:

$$y(t) + RC \frac{d}{dt}y(t) = x(t) , \quad y(-\infty) = 0 . \quad (8)$$

Si tratta, quindi, di un circuito lineare tempo-invariante.

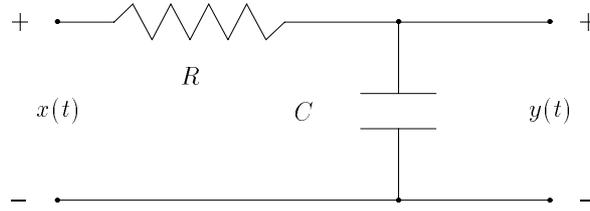


Figura 2: Circuito RC con segnale di ingresso  $x(t)$  e segnale di uscita  $y(t)$ .

Per calcolare la risposta impulsiva, conviene utilizzare il metodo sopra descritto. Si pone, pertanto,  $x(t) = u(t)$  e si risolve l'equazione differenziale:

$$g(t) + RC \frac{d}{dt} g(t) = u(t) , \quad g(-\infty) = 0 .$$

nella incognita  $g(t)$ . Soluzione della precedente equazione differenziale è:

$$g(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) u(t) , \quad (9)$$

che ha l'andamento tipico che descrive il fenomeno di carica del condensatore  $C$ , attraverso la resistenza  $R$ , fino al valore di tensione 1. Nel calcolare, infine, la derivata della risposta al gradino  $g(t)$ , occorre tenere presente che si tratta di una funzione discontinua e va, pertanto, applicata la derivata debole. Utilizzando la regola di derivazione per prodotti di funzioni si ottiene:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \left(1 - e^{-t/RC}\right) \delta(t) . \quad (10)$$

Si noti, ora, che l'ultimo termine rappresenta un impulso matematico con area nulla, dal momento che  $\left(1 - e^{-t/RC}\right) \delta(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) \Big|_{t=0} \delta(t)$ , ma  $\left(1 - e^{-t/RC}\right) \Big|_{t=0} = 0$ . Pertanto, la risposta impulsiva del circuito RC vale:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) . \quad (11)$$

Avendo calcolato la risposta impulsiva del circuito, è possibile scrivere in forma chiusa la relazione ingresso-uscita generale che descrive il comportamento del circuito, nonché l'operatore  $L\{\cdot\}$  ad esso relativo:

$$y(t) = L\{x(\cdot)\}(t) = \frac{1}{RC} x(t) \otimes [e^{-t/RC} u(t)] . \quad (12)$$

Grazie alla commutatività dell'operatore di convoluzione, tale espressione può essere scritta in maniera esplicita in due modi, per esempio:

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} u(t-\tau) d\tau . \quad (13)$$

Utilizzando la presenza del gradino nell'integrando, la precedente relazione si può semplificare in:

$$y(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{\tau/RC} d\tau . \quad (14)$$

L'ultima espressione può essere, infine, utilizzata per verifica: Da essa, infatti, segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= -\frac{1}{(RC)^2} e^{-t/RC} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{\tau/RC} d\tau + \frac{1}{RC} e^{-t/RC} x(t) e^{t/RC} \\ &= -\frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t) , \end{aligned}$$

che coincide proprio con la equazione differenziale (8).

## 2 Proprietà dell'operatore di convoluzione e loro interpretazioni sistemistiche

L'operatore di convoluzione gode di tre proprietà importanti:

- **Commutatività:** Date due segnali arbitrari  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , vale l'identità  $x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t)$ .
- **Associatività:** Dati tre segnali arbitrari  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ , vale l'identità  $(x_1(t) \otimes x_2(t)) \otimes x_3(t) = x_1(t) \otimes (x_2(t) \otimes x_3(t))$ .
- **Distributività rispetto alla somma:** Dati tre segnali arbitrari  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ , vale l'identità  $x_1(t) \otimes x_2(t) + x_1(t) \otimes x_3(t) = x_1(t) \otimes [x_2(t) + x_3(t)]$ .

La proprietà commutativa si può dimostrare nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) \otimes x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \\
 &\quad \text{(facendo il cambio di variabile } \theta = t - \tau \text{) ,} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \theta)x_2(\theta)d\theta \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\theta)x_1(t - \theta)d\theta \\
 &= x_2(t) \otimes x_1(t) .
 \end{aligned}$$

La proprietà associativa si prova come segue:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) \otimes (x_2(t) \otimes x_3(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\theta)x_2(\tau - \theta)d\theta x_1(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau - \theta)x_1(t - \tau)d\tau x_3(\theta)d\theta \\
 &\quad \text{(facendo il cambio di variabile } \xi = \tau - \theta \text{) ,} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\xi)x_1((t - \theta) - \xi)d\xi x_3(\theta)d\theta \\
 &= (x_1(t) \otimes x_2(t)) \otimes x_3(t) .
 \end{aligned}$$

Dal momento che vale la proprietà associativa, le parentesi che raggruppano le operazioni di convoluzione (binaria) possono essere omesse, perchè l'ordine con il quale le convoluzioni vengono calcolate è indifferente. Così si può scrivere  $x_1(t) \otimes (x_2(t) \otimes x_3(t)) = (x_1(t) \otimes x_2(t)) \otimes x_3(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) \otimes x_3(t)$ .

La proprietà distributiva si prova immediatamente scrivendo gli integrali di convoluzione in forma esplicita.

Le tre proprietà formali dell'operatore di convoluzione appena ricordate, hanno interessanti interpretazioni sistemistiche. In particolare, permettono di calcolare la risposta impulsiva di sistemi composti formati da sottosistemi connessi in *cascata* e in *parallelo* (o a 'banco').

La proprietà associativa permette di calcolare la risposta impulsiva relativa al sistema di Figura 3 composto dalla cascata di due sottosistemi LTI. Infatti, per il secondo sistema vale  $y(t) = h_2(t) \otimes w(t)$ , mentre per il primo

vale  $w(t) = h_1(t) \otimes x(t)$ , e quindi risulta che  $y(t) = h_2(t) \otimes (h_1(t) \otimes x(t))$ , mentre il sistema LTI complessivo è descritto dalla relazione ingresso-uscita  $y(t) = h(t) \otimes x(t)$ . D'altra parte, per la proprietà associativa si sa che  $y(t) = (h_2(t) \otimes h_1(t)) \otimes x(t)$ , da cui, per confronto con la precedente, si ottiene subito che  $h(t) = h_2(t) \otimes h_1(t)$ .

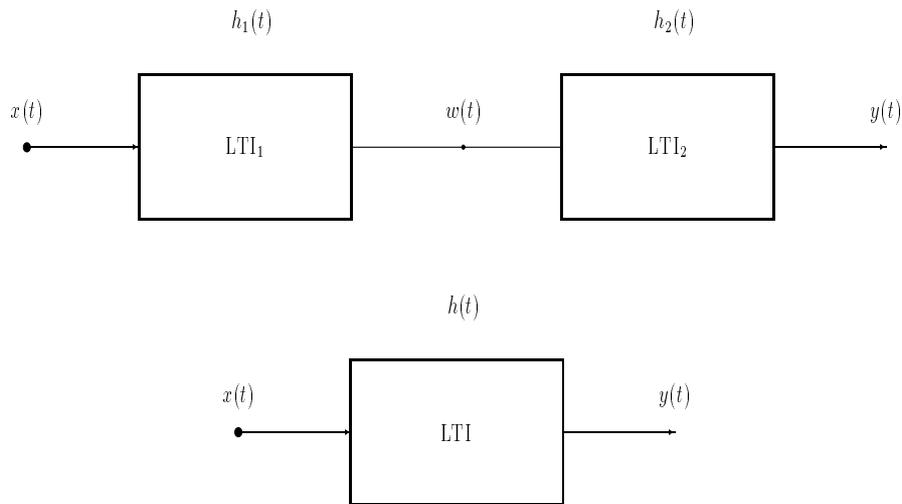


Figura 3: Due sistemi connessi in ‘cascata’ e sistema equivalente.

La proprietà commutativa permette di affermare che i due sistemi composti mostrati nella Figura 4 sono del tutto equivalenti nel comportamento ingresso-uscita. Infatti, per il primo risulta  $y(t) = h_2(t) \otimes h_1(t) \otimes x(t)$ . Per il secondo risulta  $y(t) = h_1(t) \otimes h_2(t) \otimes x(t)$ . Ma è noto che  $h_2(t) \otimes h_1(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$ , da cui l’asserto.

Un esempio di sistema formato dal parallelo di tre sottosistemi è mostrato nella Figura 5. Le equazioni che descrivono i sottosistemi e la loro connessione sono:  $y_1(t) = h_1(t) \otimes x(t)$ ,  $y_2(t) = h_2(t) \otimes x(t)$ ,  $y_3(t) = h_3(t) \otimes x(t)$  e  $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ . Sostituendo le espressioni delle uscite dei sottosistemi nella espressione dell’uscita complessiva e applicando la proprietà distributiva rispetto alla somma, si trova subito che la risposta impulsiva del sistema complessivo vale  $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ .

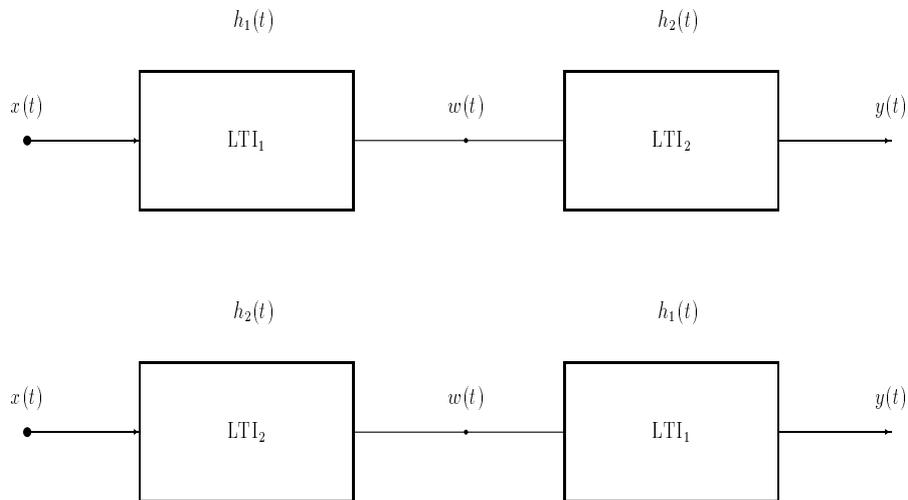


Figura 4: Scambiando l'ordine dei sottosistemi in una 'cascata', il comportamento complessivo (ingresso-uscita) non cambia.

### 3 Proprietà fondamentali dei sistemi e analisi della risposta all'impulso

In generale, la verifica delle proprietà fondamentali dei sistemi non è agevole.

Nel caso di sistemi LTI, tuttavia, è possibile verificare le rimanenti proprietà (causalità, memoria, stabilità), utilizzando dei criteri, basati sull'analisi della risposta impulsiva, che forniscono delle condizioni sufficienti.

#### 3.1 Proprietà di memoria e analisi della risposta impulsiva

Si riconosce immediatamente che tutti i sistemi LTI senza memoria sono della forma:

$$y(t) = kx(t) , \quad k \in \mathbb{K} , \quad (15)$$

con  $k$  costante. D'altra parte, la risposta  $y(t)$  deve potersi scrivere come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau . \quad (16)$$

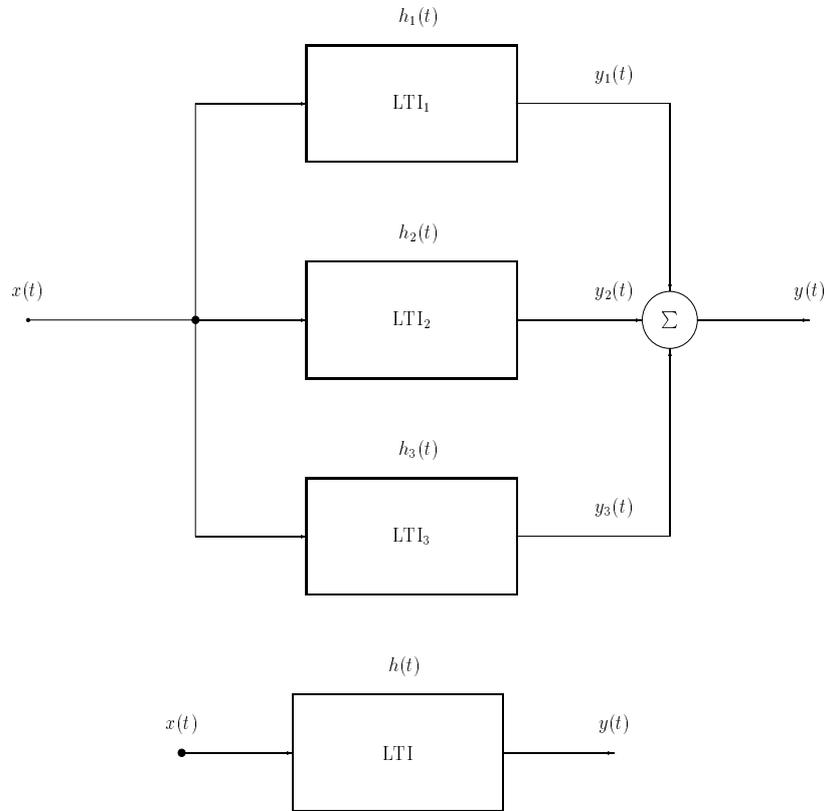


Figura 5: Tre sistemi connessi in ‘parallelo’ e sistema equivalente.

Quindi, per confronto tra le due ultime uguaglianze e ricordando le proprietà di campionamento e simmetria dell’impulso matematico, si ottiene che la risposta impulsiva di un circuito senza memoria ha struttura:

$$h(t) = k\delta(t) , \quad k \in \mathbb{K} , \quad (17)$$

con  $k$  costante arbitraria.

### 3.2 Causalità e analisi della risposta impulsiva

La relazione ingresso-uscita generale per un sistema LTI si può scrivere:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 x(t - \tau)h(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau . \end{aligned} \quad (18)$$

Dall'ultima riga si vede che il primo integrale contiene valori non-passati dell'ingresso (infatti  $\tau \in ] - \infty, 0]$  e l'integrando contiene  $x(t - \tau)$ ), mentre il secondo integrale contiene valori non-futuri dell'ingresso. Se il primo integrale è nullo, il sistema è causale. Se la risposta impulsiva è tale che:

$$h(t) = 0, \text{ per } t < 0, \quad (19)$$

il primo integrale è certamente nullo, *indipendentemente dai valori assunti dal segnale di ingresso*.

La condizione (19) è quindi condizione sufficiente di causalità.

### 3.3 Stabilità BIBO e analisi della risposta impulsiva

Una condizione sufficiente alla stabilità (BIBO) di un sistema è che la sua risposta impulsiva sia assolutamente integrabile, ovvero che:

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty. \quad (20)$$

Tale risultato si può provare considerando che, per ipotesi, esiste  $X$  finito tale che  $|x(t)| \leq X$  e che:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau \\ &\leq X \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Se vale la condizione (20), allora, posto  $Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cdot H$ , risulta certamente  $|y(t)| \leq Y$ . Ne segue che ad ogni ingresso limitato, il sistema risponde con un segnale limitato in valore, e risulta, pertanto, stabile (BIBO).

## 4 Autofunzioni dei circuiti LTI: Autofunzioni armoniche e trasformata di Fourier

Nella presente sezione e nella successiva, si conviene di assumere  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Un segnale  $x_{af}(t)$  si definisce *autofunzione* di un sistema LTI descritto dall'operatore  $L\{\cdot\}$  se risulta:

$$L\{x_{af}\} = \lambda \cdot x_{af} , \quad (21)$$

per un qualche valore  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Il valore  $\lambda$  viene detto *autovalore* associato all'autofunzione. In altri termini, un segnale è autofunzione di un sistema se tale sistema trasforma l'autofunzione in un segnale uguale a se stesso a meno di una costante moltiplicativa (complessa, in generale).

Una classe notevole di autofunzioni è data dall'insieme dei segnali:

$$x_{\omega}(t) = e^{j\omega t} , \quad t \in \mathbb{R} , \quad \omega \in \mathbb{R} , \quad (22)$$

detti *autofunzioni armoniche*. Tale proprietà si prova per sostituzione dell'espressione del segnale nell'integrale di convoluzione che descrive esplicitamente la struttura dell'operatore  $L\{\cdot\}$ :

$$\begin{aligned} L\{x_{\omega}(\cdot)\}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x_{\omega}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \lambda_{\omega} \cdot x_{\omega}(t) , \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\lambda_{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt . \quad (23)$$

E' importante osservare che la funzione  $H(\omega)$  dipende solo dalla struttura del sistema, attraverso la sua risposta impulsiva  $h(t)$ . Ci si riferisce a tale funzione come *risposta in frequenza del circuito*.

L'integrale a secondo membro si definisce *trasformata di Fourier* e si denota con il simbolo:

$$\mathcal{F}\{h\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt . \quad (24)$$

L'operatore di trasformazione di Fourier può essere applicato a qualsiasi segnale per cui l'integrale (24) esiste finito. Per esempio, se  $x(t)$  e  $y(t)$  denotano il segnale di ingresso e il segnale di uscita di un sistema, si può pensare di calcolare  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega)$  e  $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y\}(\omega)$ .

L'operatore di trasformazione di Fourier ammette operazione inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega . \quad (25)$$

Un risultato fondamentale della teoria dei sistemi LTI permette di affermare che esiste un legame tra le funzioni  $X(\omega)$ ,  $H(\omega)$  e  $Y(\omega)$ . In particolare:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) , \quad (26)$$

che viene chiamato *teorema di dualità tempo-frequenza*. In effetti, l'espressione precedente, espressa nel dominio della pulsazione  $\omega$ , è duale dell'espressione  $y(t) = h(t) \otimes x(t)$ , espressa nel dominio temporale.

Tale risultato può essere dimostrato per due segnali generici  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  che siano  $\mathcal{F}$ -trasformabili. Si dimostra, cioè, che vale:  $\mathcal{F}\{x_1 \otimes x_2\}(\omega) = \mathcal{F}\{x_1\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{x_2\}(\omega)$ . Tale risultato si può mostrare come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1 \otimes x_2\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau e^{-j\omega t} dt \\ &\quad (\text{con il cambio di variabile } \theta = t - \tau, ) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\theta) x_2(\tau) e^{-j\omega(\tau+\theta)} d\tau d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}\{x_1\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{x_2\}(\omega) . \end{aligned}$$

Una applicazione del teorema di dualità si trova nel calcolo della risposta in frequenza della cascata di più sottosistemi. Si consideri, per esempio, di nuovo il sistema di Figura 3. Se si denota con  $H(\omega)$  la risposta in frequenza del sistema LTI complessivo equivalente alla cascata, e con  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  le risposte in frequenza dei due sottosistemi, da  $h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$  si trova, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri, che  $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$ .

## 5 Autofunzioni generiche e trasformata di Laplace per sistemi causali

Una ulteriore classe notevole di autofunzioni, che comprende anche la precedente, è data dall'insieme dei segnali:

$$x_s(t) = e^{st}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (27)$$

detti *autofunzioni generiche*. Tale proprietà si prova di nuovo per sostituzione dell'espressione del segnale nell'integrale di convoluzione che descrive l'operatore  $L\{\cdot\}$ :

$$\begin{aligned} L\{x_s(\cdot)\}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x_s(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \lambda_s \cdot x_s, \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt. \quad (28)$$

La funzione  $\lambda_s$  dipende solo dalla struttura del sistema, attraverso la sua risposta impulsiva  $h(t)$ .

Dato che i sistemi LTI a tempo continuo di interesse sono frequentemente causali, si conviene di studiare questo caso a parte: Nell'ipotesi causalità, la funzione (28) si può semplificare come:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h\}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}dt. \quad (29)$$

Ci si riferisce a tale funzione come *funzione di rete* del sistema. L'integrale a secondo membro rappresenta la *trasformata (monolatera) di Laplace*.

L'integrale che definisce la trasformazione (29) è definito su regioni di piano complesso (semi-piani) del tipo:

$$\text{Re}\{s\} > \beta, \quad (30)$$

dove  $\beta$  è la *ascissa di convergenza*, che dipende dalla forma del segnale da trasformare. Tale limitazione si può meglio precisare, definendo il concetto di *funzione di ordine esponenziale*:

Data una funzione  $x(t)$ , se esistono costanti  $M > 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tali che, per ogni  $t > T$ , vale  $|x(t)| \leq Me^{\beta t}$ , si dice che  $x(t)$  è una funzione esponenziale di ordine  $\beta$ .

Si può, ora, dare una condizione *sufficiente* di esistenza delle trasformate di Laplace:

Se la funzione  $x(t)$  è generalmente continua<sup>1</sup> in ogni intervallo limitato  $[0, T]$  ed è di ordine esponenziale  $\beta$  per  $t > T$ , allora la trasformata di Laplace  $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$  esiste per ogni valore di  $s \in \mathbb{C}$  che soddisfa la condizione (30).

Per provare tale risultato, si nota che l'esistenza della trasformata  $\mathcal{L}\{x\}(s)$  nel punto  $s \in \mathbb{C}$  è assicurata se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{x\}(s)| &\leq \int_0^{+\infty} |x(t)| |e^{-st}| dt \\ &= \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\operatorname{Re}\{s\}t} dt \\ &= \int_0^T |x(t)| e^{-\operatorname{Re}\{s\}t} dt + \int_T^{+\infty} |x(t)| e^{-\operatorname{Re}\{s\}t} dt \end{aligned}$$

esiste. Per le ipotesi fatte, la funzione  $x(t)$  è generalmente continua su  $[0, T]$ , quindi il primo integrale nell'ultima riga esiste. Anche il secondo esiste, dato che  $x(t)$  è di ordine esponenziale  $\beta$  per  $t > T$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} |x(t)| e^{-\operatorname{Re}\{s\}t} dt &\leq \int_0^{+\infty} M e^{\beta t} e^{-\operatorname{Re}\{s\}t} \\ &= \frac{M}{\operatorname{Re}\{s\} - \beta}, \end{aligned}$$

perché  $\operatorname{Re}\{s\} > \beta$ . L'ultima disuguaglianza è assicurata, appunto, dalla condizione (30).

---

<sup>1</sup>Una funzione si dice *generalmente continua* in un intervallo  $[T_1, T_2]$  se è possibile suddividere l'intervallo in un numero finito di intervalli in ognuno dei quali la funzione sia continua e abbia limiti destro e sinistro finiti.

Come esempio, si può considerare il calcolo della trasformata di Laplace del gradino unitario  $\mathcal{L}\{u\}(s)$ :

$$\mathcal{L}\{u\}(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st} dt = - \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s},$$

soltanto se  $\text{Re}\{s\} > 0$ , altrimenti l'integrale non esiste.

Anche per le trasformate di Laplace vale un teorema di dualità:

$$\mathcal{L}\{x_1 \otimes x_2\}(s) = \mathcal{L}\{x_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{x_2\}(s). \quad (31)$$

La precedente relazione ha senso se tutte le quantità indicate esistono ed è valida nel semipiano intersezione dei semipiani di esistenza delle trasformate coinvolte.

la precedente relazione di dualità per le trasformate di Laplace, si può provare come segue. Si ipotizzi, prima di tutto, che:

$$x_1(t) = 0 \text{ e } x_2(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

Per definizione:

$$\mathcal{L}\{x_1 \otimes x_2\}(s) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-st} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau dt.$$

Scambiando l'ordine di integrazione, ricordando che  $x_1$  è nullo per tempi negativi e facendo il cambio di variabile  $\theta = t - \tau$ , si ottiene:

$$\mathcal{L}\{x_1 \otimes x_2\}(s) = \int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\tau}^{+\infty} e^{-s(\theta+\tau)} x_1(\tau)x_2(\theta)d\theta d\tau.$$

Ricordando, infine, che  $x_2$  è nullo per tempi negativi, si arriva a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_1 \otimes x_2\}(s) &= \int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{+\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau} x_2(\theta)e^{-s\theta} d\theta d\tau \\ &= \mathcal{L}\{x_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{x_2\}(s). \end{aligned}$$

Un applicazione del teorema di dualità per le trasformate di Laplace si può trovare nello schema riportato in Figura 6 per il calcolo della risposta di un sistema LTI, di cui sia nota la funzione di rete, in presenza di eccitazione Laplace-trasformabile.

## 6 Esempi

In chiusura della presente dispensa, si propongono i seguenti esempi per test.

1. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale  $x(t) = \delta(t)$ .
2. Verificare, usando la formula di antitrasformazione di Fourier, che  $\mathcal{F}\{\cos(\Omega t)\}(\omega) = \pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$ .
3. Calcolare la trasformata di Laplace, e la relativa ascissa di convergenza, del segnale  $x(t) = e^{at}u(t)$ , per  $a \in \mathbb{R}$  generica.
4. Calcolare la trasformata di Laplace, e la relativa ascissa di convergenza, del segnale  $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$ , per  $\omega \in [-\pi, +\pi]$  generica.
5. Calcolare la trasformata di Laplace, e la relativa ascissa di convergenza, del segnale  $x(t) = u(t - 1)$ .

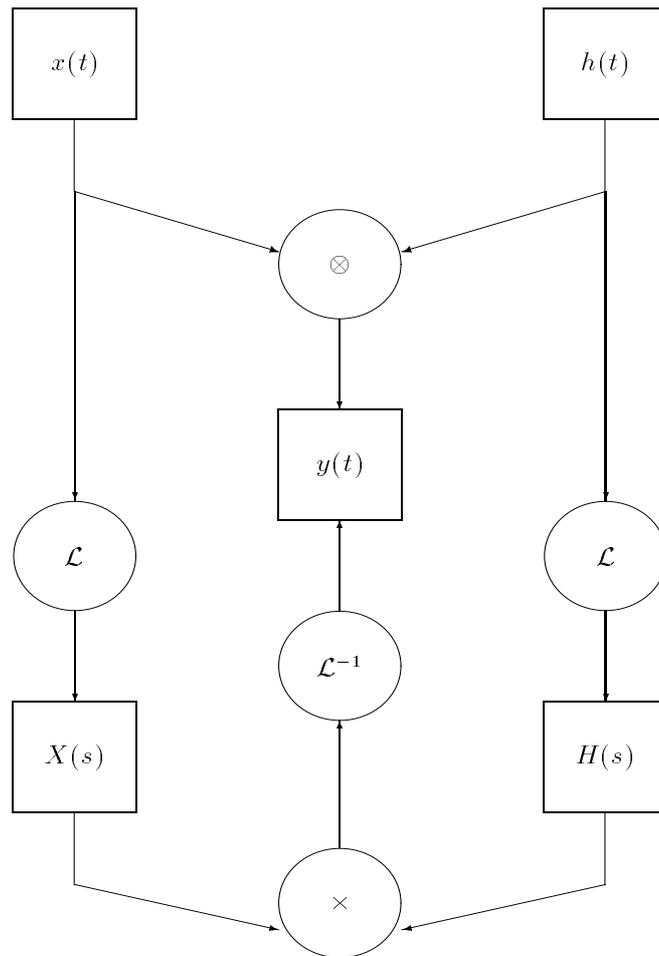


Figura 6: Schema per il calcolo della risposta di un sistema LTI in presenza di eccitazione Laplace-trasformabile.