Generalità su Segnali e Sistemi

Simone Fiori

Facoltà di Ingegneria, Università di Perugia

`E-mail: fiori@unipg.it`

Pagine: 14, **Figure**: 8

Dispense per il corso di:
Elettrotecnica
CdL Breve in Ingegneria Meccanica - Univ. Politecnica delle Marche

29 Aprile 2005

Generalità su Segnali e Sistemi

Simone Fiori

Sommario

Segnali a tempo continuo e tempo discreto: Notazione e proprietà. Segnali elementari: Gradino unitario, impulso (delta di Dirac) ed esponenziale complesso. Generalità sui sistemi: Rappresentazioni ingresso-uscita e ingresso-stato-uscita. Proprietà fondamentali: Linearità, tempo-invarianza, causalità, stabilità, memoria. Esempi su circuiti elettrici.

1 Segnali a tempo continuo e tempo discreto

Un *segnale* rappresenta l'andamento nel tempo di una grandezza misurabile. Esempi di segnale sono l'andamento nel tempo della tensione elettrica ai capi di un bipolo in un circuito, l'andamento nel tempo della velocità di rotazione dell'asse di un motore e l'evoluzione temporale della portata di fluido in una condotta.

Per rappresentare un segnale generico verranno utilizzate le notazioni $x(t)$ e $x[n]$, dove:

- la variabile $x \in \mathbb{K}$ denota il valore istantaneo del segnale;
- la notazione (t) denota un segnale che varia con continuità nel tempo, ovvero $t \in \mathbb{R}$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo continuo*;
- la notazione $[n]$ denota un segnale che varia in istanti temporali discreti, ovvero $n \in \mathbb{Z}$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo discreto.*

Per quanto riguarda l'insieme dei valori che la variabile x può assumere, l'insieme $\mathbb{K}$ è un campo scalare che, nel caso di interesse nel presente corso, può coincidere con l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori reali*, o con l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori complessi*.

Esempi di segnali sono $x(t) = e^{-t}\cos(4t)$ e $x[n] = 0.01n^2$. Entrambi sono segnali a valori reali. Il primo è un segnale a tempo continuo, che assume tutti i valori entro $[0, 1]$. Il secondo è un segnale a tempo discreto. Essi sono rappresentati graficamente nelle Figure 1 e 2, rispettivamente.

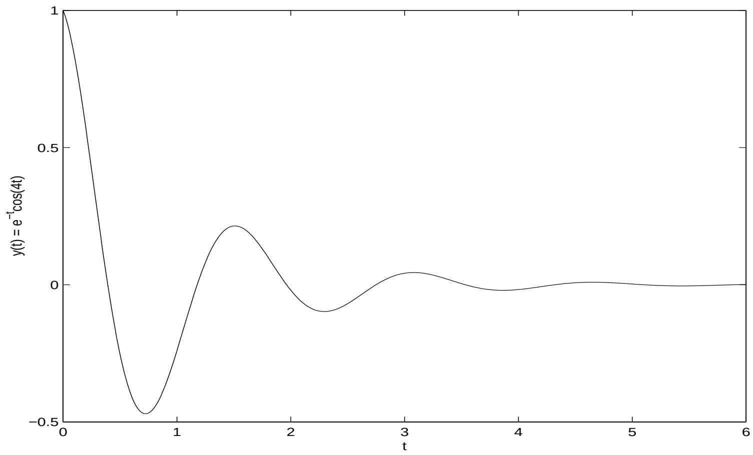

Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo $x(t)$ (mostrato solo per $t \geq 0$).

Con riferimento ai segnali a tempo discreto, è utile ricordare che essi possono derivare da segnali a tempo continuo a seguito di campionamento nel tempo, ma i segnali a tempo discreto possono 'nascere' direttamente a tempo discreto. Si pensi, a esempio, all'operazione di scrittura di un testo su tastiera: Se a ogni carattere si associa un valore numerico, la sequenza dei valori ottenuti è una sequenza temporalmente discreta, infatti, tra la pressione successiva di due tasti non è definito alcun valore intermedio.

Nella maggior parte dei casi, saranno di interesse segnali a tempo continuo.

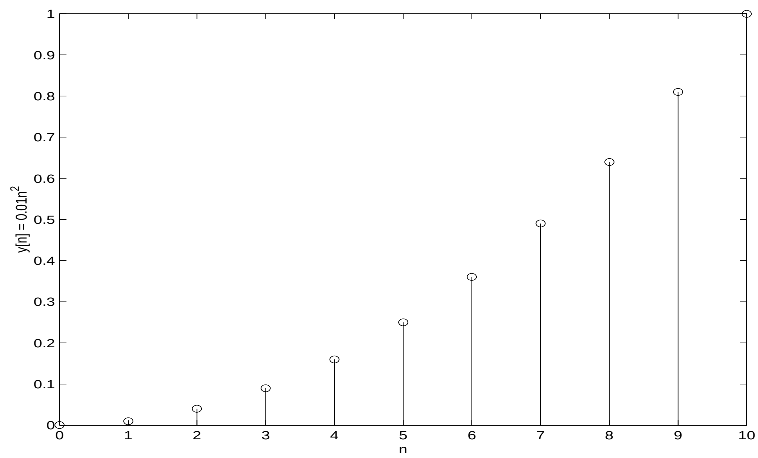

Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto $x[n]$ (mostrato solo per $n \geq 0$).

2 Segnali elementari

Due segnali elementari a tempo continuo di particolare importanza sono il *gradino unitario* $u(t)$ e l'impulso matematico (o 'delta' di Dirac) $\delta(t)$.

Il gradino unitario è definito come:

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{per } t = 0 \ , \\ 1 & \text{per } t > 0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Si tratta quindi di una funzione discontinua. Una definizione alternativa può non prevedere che sia fissato il valore del gradino per $t = 0$, che rimane quindi indefinito nell'origine.

L'impulso matematico non è una funzione convenzionale, ma rientra nella classe delle *distribuzioni*. Può essere riguardato come limite di funzioni parametrizzate. Ad esempio, definita la funzione $\delta_\varepsilon(t)$ come:

$$\delta_\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2|\varepsilon|}[u(t+\varepsilon) - u(t-\varepsilon)] \ , \ \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \ , \ t \in \mathbb{R} \ , \tag{2}$$

si può definire:

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) \ . \tag{3}$$

Si noti, che la funzione $\delta_\varepsilon(t)$ ha la forma di un 'rettangolo' centrato nell'origine, avente base $2|\varepsilon|$ e altezza $\frac{1}{2|\varepsilon|}$, come mostrato in Figura 3: Se si fa tendere ε a zero, la base si stringe e l'altezza aumenta, mentre l'aera del rettangolo rimane costante al valore 1. Di conseguenza, la $\delta(t)$ è nulla ovunque tranne che nell'origine, pur sottendendo un'area unitaria.

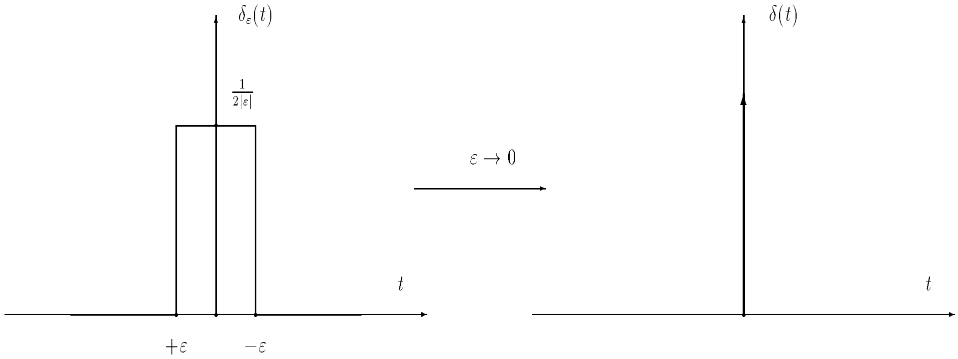

Figura 3: Procedimento di costruzione di un impulso $\delta(t)$ tramite la funzione $\delta_\varepsilon(t)$.

Alternativamente, definita la funzione $g_\sigma(t)$ come:

$$g_\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \ , \ \sigma > 0 \ , \ t \in \mathbb{R} \ , \tag{4}$$

si può definire:

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\sigma \to 0^+} g_\sigma(t) \ . \tag{5}$$

Da entrambe le definizioni proposte seguono le tre proprietà fondamentali dell'impulso, ovvero:

- **Proprietà di normalità**: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$,
- **Proprietà di campionamento**: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$ (per ogni funzione f continua),
- **Proprietà di simmetria**: $\delta(t) = \delta(-t)$.

Infatti, le proprietà di normalità e di simmetria seguono immediatamente dalle definizioni. La proprietà di campionamento si può mostrare osservando dapprima che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t-\tau)dt \approx \frac{f(\tau)}{2|\varepsilon|} \times 2|\varepsilon| \ ,$$

se si utilizza la definizione (3) e per ε sufficientemente piccolo si approssima $f(t) \approx f(\tau)$ in $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$. Se si fa tendere ε a zero, l'errore di approssimazione tende a zero.

Un altro segnale elementare di interesse è l'esponenziale complesso:

$$E(t;s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{st} \ , s \in \mathbb{C} \ , \ t \in \mathbb{R} \ . \tag{6}$$

Il segnale $E(t;s)$ assume valori complessi e, se si scrive il parametro complesso in forma cartesiana, ovvero $s = \alpha + j\omega$ (dove $j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$), si ha l'identità $E(t;s) = e^{\alpha t}[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$.

Come ultima osservazione, è interessante notare che l'impulso unitario si può ottenere tramite una operazione di derivazione (*debole*) dal gradino unitario. Vale, infatti, la seguente identità:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) \ , \tag{7}$$

dove l'operatore $\frac{d}{dt}$ va inteso come derivata debole (qui e laddove necessario nel seguito della trattazione). Tale relazione può essere provata, per esempio, definendo la funzione ausiliaria:

$$G_\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{t} g_\sigma(\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma^2}\right)d\tau \ . \tag{8}$$

Si noti che $G_\sigma(0) = \frac{1}{2}$. Si ha quindi che:

$$\lim_{\sigma\to 0^+} G_\sigma(t) = u(t) \ , \tag{9}$$

da qui segue facilmente l'asserto per derivazione debole di ambo i membri.

3 Generalità sui sistemi

Un sistema è un oggetto che trasforma una o più variabili di *ingresso* (o *eccitazioni*) in una o più variabili di *uscita* (o *risposte*). Esempi di sistema sono: Un circuito (filtro) che accetta in ingresso un segnale vocale contaminato da rumore di fondo e lo restituisce in uscita con il rumore attenuato o cancellato; un motore elettrico che accetta in ingresso una eccitazione in tensione o corrente e risponde con un segnale che rappresenta la velocità angolare dell'asse di rotazione.

In generale, un sistema ammette almeno due tipi di rappresentazione formale:

- Rappresentazione *ingresso-uscita*: Il sistema viene visto come "scatola nera" (*black box*) accessibile solo dai canali di ingresso e di uscita. Tutte le informazioni relative al comportamento interno del sistema vengono trascurate.

- Rappresentazione *ingresso-stato-uscita*: Il sistema viene descritto dalle variabili di ingresso, dalle variabili di uscita e da variabili interne dette *variabili di stato*.

La rappresentazione in spazio di stato è più ricca di informazione e più potente della rappresentazione ingresso-uscita. La presente dispensa si riferisce alle rappresentazioni ingresso-uscita per sistemi con singolo ingresso e singola uscita (SISO).

In generale, un sistema con un ingresso e una uscita (sistema SISO), può essere schematizzato come mostrato nella Figura 4.

Formalmente, la descrizione matematica del comportamento (ingresso-uscita) del sistema viene affidata ad un operatore $L\{\cdot\}$ che descrive la legge di trasformazione del segnale in ingresso nel segnale in uscita, ovvero:

$$y = L\{x\} \ . \tag{10}$$

Figura 4: Schema generale di sistema SISO con segnale di ingresso x e segnale di uscita y.

A volte, l'operatore $L\{\cdot\}$ può essere dato in forma implicita, per esempio in termini di una equazione differenziale nella variabile y. Alcuni esempi di descrizioni ingresso-uscita di sistemi sono:

$$\begin{aligned}
&y(t) = x^2(t) + 2x(t-\pi) - 3 \ , \\
&y(t) = \frac{1}{t}\sqrt{\int_0^t x^2(t)} \ , \\
&\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_2 y(t) = x(t) \text{ (con opportune condizioni iniziali)} \ .
\end{aligned}$$

Un ulteriore esempio viene dallo studio del circuito RC rappresentato in Figura 5. Dallo studio del circuito e dalla relazione costitutiva del conden-

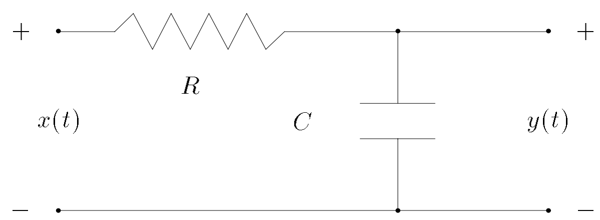

Figura 5: Circuito RC con tensione di ingresso $x(t)$ e tensione di uscita $y(t)$.

satore si vede che il segnale di ingresso e il segnale di uscita sono legati dalla relazione differenziale:

$$y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t) \ , \tag{11}$$

corredata da una opportuna condizione iniziale (per esempio, $y(-\infty) = 0$.)

4 Proprietà fondamentali dei sistemi

Le proprietà fondamentali dei circuiti per le rappresentazioni esterne sono delle proprietà di carattere generale che definiscono sottoclassi dell'insieme dei sistemi. In accordo con il tipo di rappresentazione considerata, le proprietà fondamentali non dipendono dalla struttura interna dei sistemi ma solamente dal loro comportamento esterno.

Le cinque proprietà fondamentali considerate nella presente dispensa sono riassunte di seguito:

- **Linearità**: Un sistema si definisce *lineare* se soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti.
- **Tempo-invarianza**: Un sistema si definisce *tempo-invariante* se il suo comportamento non dipende dal tempo, ovvero, se la risposta non dipende esplicitamente dall'istante di applicazione dell'eccitazione.
- **Causalità**: Un sistema si definisce *causale* se soddisfa il principio di sequenzialità di causa ed effetto.
- **Memoria**: Un sistema si definisce *con memoria* se necessita della conoscenza di valori passati e/o presenti e/o futuri dell'eccitazione per rispondere nell'istante corrente. Viceversa, se né valori passati né valori futuri sono necessari, ma solamente il valore corrente viene richiesto, allora il sistema si dice *senza memoria*.
- **Stabilità BIBO**: Un sistema si definisce *stabile BIBO* se a eccitazioni limitate in valore risponde con segnali limitati in valore.

Le precedenti proprietà possono essere formalizzate stabilendo condizioni formali sull'operatore $L\{\cdot\}$.

Come nota sulla verifica pratica delle proprietà menzionate, va ricordato che *per dimostrare che una proprietà è verificata non basta mostrare un* *esempio positivo; al contrario, mostrare un esempio negativo è sufficiente a provare che una proprietà non è verificata.*

Infine, è bene ricordare che, in generale, le proprietà non sono legate fra loro, ovvero non si implicano a vicenda. Per sistemi particolarmente semplici, tuttavia, tale distinzione viene meno: Per esempio, si riconosce facilmente che un sistema senza memoria è senz'altro causale.

4.1 Proprietà di linearità

Il principio di sovrapposizione degli effetti stabilisce che se $y_1 = L\{x_1\}$, $y_2 = L\{x_2\}$ e se $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, allora, posto $y_3 = L\{x_3\}$, risulta $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$. Tale identità deve valere per ogni coppia di segnali x_1, x_2 e per ogni coppia di costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Per esempio, il sistema descritto da $y(t) = 2x(t)$ soddisfa chiaramente il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi è lineare. Viceversa, il sistema $y(t) = 2x^2(t)$ non soddisfa il principio di sovrapposizione, quindi non è lineare.

Come ulteriore esempio, si consideri il circuito illustrato in Figura 6, dove il segnale di ingresso è la tensione $x(t)$ e il segnale di uscita rappresenta la tensione $y(t)$. Si supponga dapprima che il valore di tensione impresso dalla pila sia $E \neq 0$. Studiando il circuito (per esempio con il metodo delle correnti fittizie di maglia), si ottiene la relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}E \ .$$

Per studiare la linearità del circuito, si può tentare di verificare se il principio di sovrapposizione sia verificato. In particolare, si considerano le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &\to y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}E \ , \\
x_2(t) &\to y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}E \ , \\
x_3(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to
\end{aligned}$$

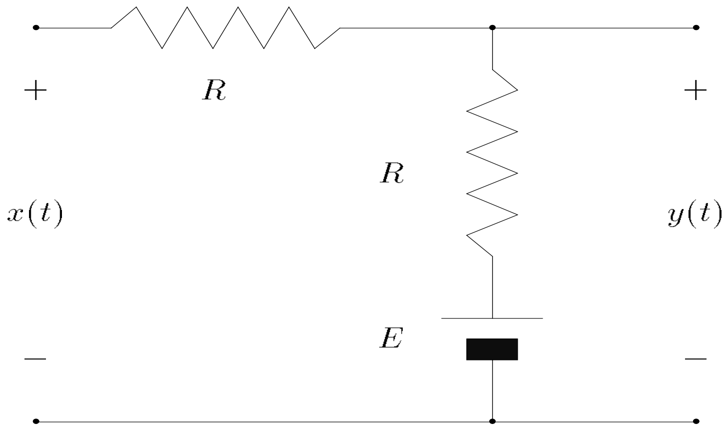

Figura 6: Esempio di circuito non lineare.

$$y_3(t) = \frac{1}{2}x_3(t) + \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\alpha x_1(t) + \frac{1}{2}\beta x_2(t) + \frac{1}{2}E \ ,$$
$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \frac{1}{2}\alpha x_1(t) + \frac{1}{2}\beta x_2(t) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)E \ .$$

E' facile quindi rendersi conto che, in generale, $y_3(t) \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ e che, quindi, il sistema non è lineare. Si vede però immediatamente che il circuito diventa lineare se si sceglie $E = 0$.

Si deve infine osservare che la linearità di un sistema dipende anche dal campo di valori $\mathbb{K}$ su cui esso insiste. Si consideri l'esempio descritto da $y = L\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} Re\{x\}$, dove $Re\{\cdot\}$ rappresenta l'estrazione della parte reale della quantità complessa in argomento. Se i coefficienti della combinazione lineare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora vale certamente l'identità $Re\{\alpha x_1 + \beta x_2\} = \alpha Re\{x_1\} + \beta Re\{x_2\}$. Se, invece, i coefficienti della combinazione lineare $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, non è detto che la precedente uguaglianza valga.

4.2 Proprietà di tempo-invarianza

Il principio di tempo-invarianza si può formalizzare osservando che, se accade che:

$$x(t) \rightarrow y(t) = L\{x\}(t) \ ,$$

$$\tilde{x}(t) = x(t-\tau) \to \tilde{y}(t) = L\{\tilde{x}\}(t-\tau) = y(t-\tau) \ ,$$

per ogni valore di τ, allora la risposta del sistema non dipende dall'istante di applicazione dell'eccitazione.

Per esempio, il sistema $y(t) = x^2(t) + x(t-1)$ è certamente tempo invariante (il risultato dell'applicazione di una eccitazione non dipende esplicitamente dall'istante di applicazione della stessa). Il sistema descritto da $y(t) = t \cdot x(t)$ non è tempo invariante. Infatti, per esempio, se $x(t) = u(t)$, allora $y(t) = tu(t)$ e se $\tilde{x}(t) = u(t-1)$, allora $\tilde{y}(t) = tu(t-1)$. Tuttavia, $y(t-1) = (t-1)u(t-1)$, perciò $\tilde{y}(t) \neq y(t-1)$. I due segnali sono rappresentati graficamente in Figura 7.

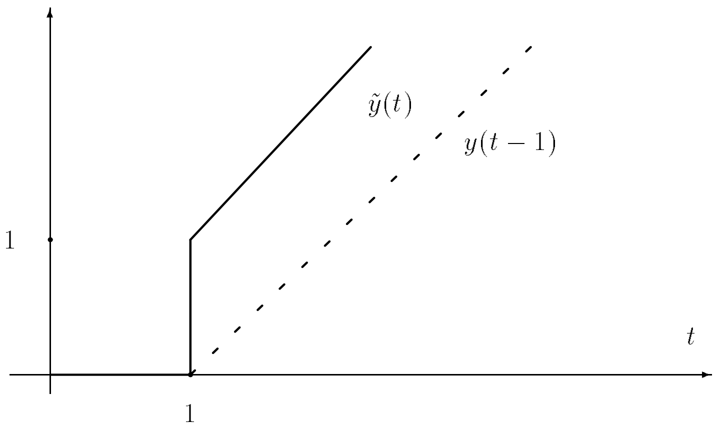

Figura 7: Rappresentazione grafica dei segnali relativi all'esempio del sistema $y(t) = t \cdot x(t)$.

Un esempio tipico di sistema non tempo-invariante è quello che descrive la tariffazione telefonica in base alla durata della chiamata: Due telefonate della stessa durata, se effettuate in fasce orarie cui corrispondono tariffe diverse, danno luogo a tariffazione differente.

4.3 Proprietà di causalità

Se si fa la convenzione di indicare con $x(\cdot)|_{t_1}^{t_2}$, con $t_1 \leq t_2$, il segmento del segnale di ingresso $x(t)$ compreso tra gli istanti temporali t_1 e t_2, la proprietà di causalità si può esprimere compattamente con:

$$y(t) = L\{x(\cdot)|_{-\infty}^{+\infty}\}(t) \equiv L\{x(\cdot)|_{-\infty}^{t}\}(t), \ \forall t \ . \tag{12}$$

In altri termini, l'operatore $L\{\cdot\}$ 'utilizza' solo i valori dell'ingresso relativi a istanti temporali precedenti l'istante t, e al valore dell'ingresso relativo all'istante t stesso, per calcolare il valore dell'uscita all'istante t: I valori futuri vengono ignorati.

A esempio, i sistemi $y(t) = x(t-1)$ e $y(t) = x(t-3) + \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau)d\tau$ sono causali, mentre il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = y(t-1) + x(t+\pi)$ non è causale.

4.4 Proprietà di memoria

Utilizzando ancora la notazione precedente, questa proprietà si può esprimere con:

$$y(t) = L\{x(\cdot)|_{-\infty}^{+\infty}\}(t) \equiv L\{x(\cdot)|_{t}^{t}\}(t) = L\{x(t)\}(t), \ \forall t \ . \tag{13}$$

A esempio, il circuito $y(t) = \sqrt{|x(t)|}$ non ha memoria, mentre i circuiti descritti dalle relazioni ingresso-uscita $y(t) = x^2(t+1)$ e $y(t) = x(t-3) + \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau)d\tau$ sono con memoria.

4.5 Proprietà di stabilità (BIBO)

La sigla BIBO significa *bounded-input, bounded-output.* Tale tipo di stabilità si formalizza come segue. Se:

$$\forall x(t) \text{ t.c. } \exists X < +\infty \text{ t.c. } |x(t)| \leq X \Rightarrow \exists Y < +\infty \text{ t.c. } |y(t)| \leq Y \ , \tag{14}$$

allora il sistema è stabile BIBO. In altri termini, se per ogni segnale di ingresso il cui grafico è contenuto nella 'fascia' orizzontale simmetrica intorno all'origine di ampiezza limitata $2X$, il grafico dell'uscita è contenuto nella 'fascia' orizzontale simmetrica intorno all'origine di ampiezza limitata $2Y$, come illustrato in Figura 7, allora il sistema è stabile BIBO.

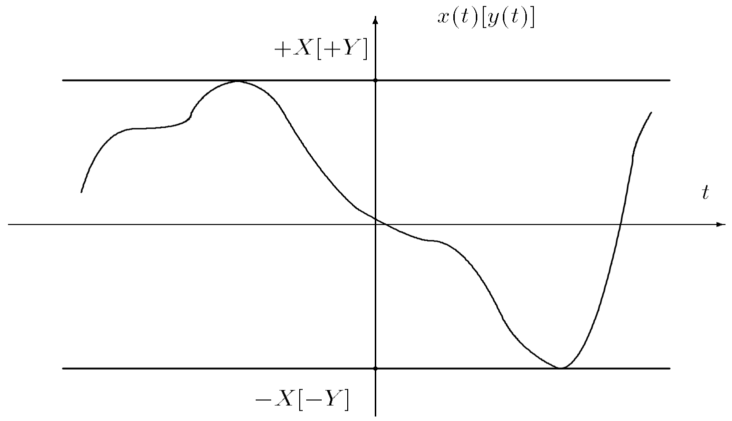

Figura 8: 'Fascia' orizzontale, simmetrica intorno all'origine, che delimita i segnali di ingresso [di uscita] in un sistema stabile BIBO.

Per esempio, il sistema $y(t) = x^2(t) + 3x(t-1)$ è stabile BIBO, infatti, posto $Y = X^2 + 3X$, si verifica subito che $|y(t)| \leq Y$ se $|x(t)| \leq X$. Viceversa, il sistema descritto dalla equazione ingresso-uscita $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (integratore ideale) è instabile. Per provarlo, basta prendere $x(t) = u(t)$ (nel qual caso si può prendere $X = 1$) e calcolare l'uscita, che vale $y(t) = tu(t)$, che è un segnale a valori sempre crescenti nel tempo per $t \geq 0$ e, dunque, illimitato.

A riprova del fatto che si può commettere un errore logico se si tenta di dimostrare una proprietà tramite esempi, si consideri l'integratore ideale in cui si ponga, come ingresso, il segnale $x(t) = \sin(t)u(t)$, Tale segnale è senz'altro limitato in valori, e si ha:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)u(\tau)d\tau = u(t)\int_{0}^{t} \sin(\tau)d\tau = [1 - \cos(t)]u(t) \ .$$

In questo caso, l'uscita è limitata (si può assumere $Y = 2$), tuttavia non si può concludere che il sistema in oggetto sia stabile (si è già mostrato che non lo è, perché esiste almeno un segnale di ingresso limitato che rende l'uscita illimitata).

5 Esempi

In chiusura della presente dispensa, si propongono i seguenti esempi per test.

1) Stabilire se il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = \cos(2t)x(t)$ gode di qualche proprietà fondamentale.

2) Stabilire se il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = \tanh(2x(t))$ gode di qualche proprietà fondamentale. (La funzione tangente iperbolica è definita come $\tanh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.)

3) Stabilire se il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = \cos(t+2)x(t)$ gode di qualche proprietà fondamentale.

4) Stabilire se il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ gode di qualche proprietà fondamentale.